PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

ALGEBRA ELEMENTAR

accommodada a poder servir como auxilio no ensino dos que frequentam o 3.º anno de Mathematica do Curso Geral dos Lyceus

SEGUNDA EDIÇÃO

PRIMEIRO ANNO—SEGUNDA SERIE

CADA VOLUME 50 REIS

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada,—e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

1882
DAVID CORAZZI, EDITOR
EMPREZA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de ouro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração: 40, R. da Atalaya, 52, Lisboa
Filial no Brazil: 40, R. da Quitanda, Rio de Janeiro

NUMERO
14

ERRATAS MAIS IMPORTANTES

Pag.	Linha	Onde se lê	Leia-se
7	10	dispol-as	dispol-os
8	38	suppunhamos	supponhamos
9	9	superiores	inferiores
»	10	$-7<2$	$-7<-2$
10	12 a 13	*dois monomios*	*monomios*
13	27	obs. III	esch. III
14	39	b^5	b^4
15	41	$a x^2, b x^2;$	$+a x^2, -b x^2;$
»	42	$a x^2, b^2 x, c^2 x$	$+a^2 x, +b^2 x, -c^2 x$
17	14	$-c n$	$+c n$
18	24	$a y^2 + x y$	$a y^2 + b y$
25	13	$\frac{A+m}{B+m}$	$\frac{A \times m}{B \times m}$
27	16	Formam-se	Sommam-se
28	28	quantia	quanti-
31	2	contar	conter
36	19	juntando-os	juntando-as
»	35	$10x + 6y = 27$	$10x + 6y = 18$
37	1	$x = 15$	$x = 6$
»	2	3×15	3×6
»	3	$4 - 45 = -41$	$4 - 18 = -14$
»	»	$y = -\frac{41}{2}$	$y = -7$
39	24	$3 \times \frac{2a-b}{3}$	$2 \times \frac{2a-b}{3}$
42	7	$46\frac{2}{7}$ passos	72 passos
45	31	$\frac{m}{q} > \frac{n}{p}$	$\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$
48	4	é>0	>0
53	35	traduz	traduzem
55	8	1272	12720
56	1	operação	equação
59	12	Seja$^m \sqrt{a=r}$	Seja $\sqrt[m]{a}=r$
»	20	Log. $m\sqrt{a}$	Log. $\sqrt[m]{a}$

ALGEBRA ELEMENTAR

INTRODUCÇÃO

1. A *Algebra* é a parte das sciencias mathematicas que emprega signaes proprios para abreviar e generalizar os raciocinios exigidos pela resolução das questões relativas acs numeros. E', portanto, a Arithmetica geral.

Estas questões são de duas especies: o *theorema* e o *problema*. O theorema tem por fim demonstrar a existencia de certas propriedades em numeros conhecidos e dados. O problema visa a achar numeros, servindo de base o conhecimento previo de outros que com aquelles tenham relações conhecidas.

2. Para a realização d'esta dupla especie de questões soccorre-se a Algebra dos meios seguintes:

a) Lettras. As lettras do alphabeto servem para representar os numeros sobre que se tem de operar. O seu emprego abrevia os raciocinios e generaliza-os, porque, demonstrando a existencia de relações e propriedades entre varios numeros simultaneamente, fal-o sem restricção de valores particulares para os mesmos numeros. As lettras de emprego usual são as latinas, e só n'alguns casos as gregas. Quando as lettras, por conveniencia, se repetem com differentes valores, usam-se signaes distinctivos para as extremar. Exemplo: a', a'', a''', (*á* linha, *á* duas linhas, *á* tres linhas), etc., ou a_1, a_2, etc. (*á* primo, *á* segundo), etc.

b) Signaes. Ha varios signaes empregados pela Algebra. O signal $+$, lê-se *mais*, e serve para indicar que a quantidade á esquerda, e junto á qual estiver, se deve addicionar. A's quantidades existentes no começo das expressões suppôr-se-ha o signal $+$, quando não tiverem outro expresso. O signal —, *(menos)*, serve para denotar que uma quantidade á esquerda, e junto á qual estiver, se deve subtrahir de outra. $\times$, e . *(multiplicado por)*, indicam multiplicação. Lettras ou expressões litteraes contiguas indicam tambem multiplicação, imbora não haja signal algum de permeio. Exemplo: as expressões $a \times b$, ou $a \,.\, b$, ou $a\,b$, assim como $(a+b) \times (c+d)$, ou $(a+b).(c+d)$, ou $(a+b)\,(c+d)$, denotam multiplicação entre as duas quantidade $a b$, e $a+b$ e $c+d$. O signal : significará que a quantidade que lhe ficar á esquerda se deve dividir pela que lhe ficar á direita. Exemplo: $a : b$, lê-se a dividido por b. A mesma interpretação terá um traço, superior e inferiormente ao qual se acharem duas quantidades. Assim $\frac{a}{b}$, poderá lêr-se a dividido por b.

Alêm d'estes, emprega a Algebra outros signaes, taes como: $=$ *(egual a)*, que, quando collocado entre duas quantidades ou expressões, significará que uma é egual á outra. Assim: $m+a=n+b$, quer dizer que a expressão $m+a$ *é egual a* $n+b$. A primeira, $m+a$, chama-se *primeiro membro* da egualdade; a segunda, $n+b$, chama-se *segundo membro*. Os signaes $>$ e $<$ indicam desegualdade a favor da expressão para onde estiver voltada a abertura do angulo, e lêem-se, respectivamente, *maior do que*, e *menor do que*. Assim $a>b$ e $a<c$ lêem-se: a maior do que b, e a menor do que c. O signal $\sqrt{\ }$ *(radical)* indica uma raiz para extrahir. Junta-se-lhe um numero, chamado *indice*, *grau* ou *expoente* da raiz, para precisar de que raiz se trata. $\sqrt[5]{a}$ quer dizer *raiz quinta de a*. Quando não houver expoente manifesto, a raiz será *quadrada*. $\sqrt{a}$ ler-se-ha *raiz quadrada de a*. Os signaes $\because$ e $\therefore$ significam *porque* e *portanto*. Quando quizermos denotar apenas a differença entre duas quantidades, sem insinuar que uma é maior do que outra, usaremos o signal $\backsim$. Exemplo: $a \backsim b$ significará a differença entre a e b; sem querer dizer que a é maior do que b, nem que b é maior do que a. Quando entre duas quantidades houver o signal $\diamond$, dir-se-hão *equivalentes*. Assim $A \diamond B$, lê-se *A equivale* ou *é equivalente* a B. O signal ( ), *parenthesis*, representa o numero resultante das operações indicadas dentro d'elle.

c) Coefficientes. O *coefficiente* é o signal empregado para indicar a addição de muitos numeros eguaes, ou, o que é o mesmo, para denotar quantas vezes uma quantidade entra como parcella n'uma addição. Por exemplo, em vez de $a+a+a+a$, que representa a addição de 4 numeros eguaes a a, escreveremos $4a$; $7bc$, significará a addição de 7 parcellas eguaes a bc. E' portanto o numero escripto á esquerda da parcella, e que será egual a 1, quando não houver outro valor expresso.

d) Expoentes. O *expoente* é um numero que se escreve á direita e superiormente á quantidade a que se refere, para indicar quantas vezes ella entra como factor n'um producto. Por exemplo, $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$, mostrando o numero 5 que a quantidade a figura 5 vezes como factor n'um producto. O producto de factores eguaes chama-se *potencia;* o factor repetido diz-se *base* da potencia; e o numero de vezes que o factor se repete, é, como dissemos, o *expoente.* A segunda potencia de uma quantidade diz-se *quadrado;* e a terceira, *cubo.* Póde ler-se abreviadamente uma potencia, por exemplo, a^5, dizendo *á cinco.* C^m, póde ler-se *c m,* quando este modo de leitura não produza ambiguidade. N'este caso dir-se-ha *c levantado ou elevado a m.*

3. As denominações de *quantidade litteral, quantidade algebrica, expressão litteral, expressão algebrica,* são indistinctamente empregadas para designar qualquer reunião de quantidades por lettras, e entre si ligadas pelos signaes algebricos acima ditos. Assim: $3a^2 + 4\sqrt{a} - \frac{2}{3}a^5$, é uma expressão a que se póde dar qualquer dos nomes mencionados. A's quantidades que se reunem pelos signaes algebricos $+$ ou $-$, chama-se *termo* ou *monomio,* ou *quantidade monomia.* Ordinariamente o signal que precede o termo, pertence-lhe. Portanto a expressão dada compõe-se dos seguintes termos ou monomios, a saber: $3a^2, +4\sqrt{a}, -\frac{2}{3}a^5$. A reunião de muitos mononimos chama-se *polynomio,* que terá o nome especial de *binomio* ou *trinomio,* quando só tiver dois ou tres termos. Dá-se tambem muitas vezes aos monomios o nome de quantidades *incomplexas,* e aos polynomios o de *complexas.*

4. Chamam-se em Algebra *quantidades racionaes,* as que não contêem radicaes. Exemplos: $4x^4, -\frac{2}{3}a^5, +4ab$.

Quantidades inteiras, dizem-se as que não têem denominadores. Exemplos: $3ac, -4a^5, +2abc$.

5. A somma dos expoentes das lettras de um termo constitue o seu *grau,* ou o *numero de suas dimensões.* Assim

$4\,a\,b^2\,c^3$, em que os expoentes são 1, 2, e 3, é termo de *seis dimensões* ou do sexto grau.

Se todos os termos de uma expressão têem o mesmo grau, a expressão é *homogenea*. Por exemplo: $2\,a^4 - 3\,a^3\,b + a\,b^3 - 2\,a\,b\,c^2$, é expressão homogenea, porque todos os termos são do quarto grau.

6. *Termos similhantes* são os que têem as mesmas lettras levantadas ás mesmas potencias. Exemplos: $5\,a^3\,b^2, 4\,a^3\,b^2, 7\,a^3\,b^2$, são termos similhantes, por terem as lettras a e b com os mesmos expoentes respectivos 3 e 2.

Succede muitas vezes ter um polynomio muitos termos similhantes, sendo portanto susceptivel de simplificação. Esta consiste em substituil-os por um termo só, fazendo as operações indicadas pelos signaes, e approximando-os ou collocando-os em columna vertical, tendo todavia o cuidado de a cada um conservar o seu signal respectivo. E' evidente que por esta transposição o valor da expressão não se alterou, porque, sendo esse valor dependente do de cada lettra e das operações que com ellas e com os differentes termos se devem effectuar, pela transposição ou mudança de logar nenhuma d'estas condições deixou de existir, se não alterarmos, mas antes conservarmos, os signaes dos termos.

Para darmos um exemplo de reducção de termos similhantes seja o polynomio

$$2\,a^3\,b\,c^2 - 3\,a^2\,x + 5\,a^3\,b\,c^2 + b\,c - 5\,a^2\,x - a^3\,b\,c^2 + 2\,b\,c$$

Temos evidentemente os seguintes grupos de termos similhantes, a saber

$$\begin{array}{lll} +2\,a^3\,b\,c^2 & -3\,a^2\,x & +\;\;b\,c \\ +5\,a^3\,b\,c^2 & -5\,a^2\,x & +2\,b\,c \\ -\;\;a^3\,b\,c^2 & & \end{array}$$

O primeiro grupo dá, effectuando as operações indicadas pelos signaes, $6\,a^3\,b\,c^2$; porque $2\,a^3\,b\,c^2$ com $5\,a^3\,b\,c^2$ dá $7\,a^3\,b\,c^2$, que diminuido de $a^3\,b\,c^2$ (*um* $a^3\,b\,c^2$), produz $6\,a^3\,b\,c^2$. O segundo grupo é egual a $-\,8\,a^2\,x$, porque pela arithmetica sabemos que uma subtracção *successiva* se converte em *ordinaria* tomando para subtractivo a somma dos subtractivos dados. O terceiro grupo é egual a $3\,b\,c$, porque $2\,b\,c$ com (*um*) $b\,c$ dá $3\,b\,c$.

D'aqui a seguinte regra: *reduzem-se termos similhantes sommando todos os termos additivos, sommando egualmente todos os termos subtractivos, fazendo a differença das duas sommas e affectando o resultado com o signal da maior d'ellas.* Convem notar que a reducção affecta simplesmente os coefficientes e nunca os expoentes, e que é conveniente effectuál-a sempre que seja possivel.

7. Dissemos acima que a disposição e arranjo das lettras de um termo nada influia no valor d'este, comtanto que os signaes de relação entre ellas se não alterassem. O mesmo observamos com respeito á collocação dos termos na expressão algebrica de que fazem parte. Advertiremos, todavia, que é preferivel, em cada termo, seguir a ordem alphabetica; e, para uma expressão em que ha termos que incerrem uma certa lettra, dispol-as segundo a ordem crescente ou decrescente dos expoentes com que ella nelles figura. Exemplo: será preferivel escrever $2\,a^3\,x\,y^2$ a $2\,y^2\,x\,a^3$; e $x^4+a\,x^3-4\,a^2x^2-2\,a^3\,x+7\,a^4$, ou $7\,a^4-2\,a^3\,x-4\,a^2\,x^2+a\,x^3+x^4$, a $a\,x^3-2\,a^3\,x-4\,a^2\,x^2+x^4+7\,a^4$. Collocar ou transpor os termos de um polynomio d'esta fórma, é *ordenál-o* segundo as potencias crescentes ou decrescentes de uma lettra, que se chama *principal*.

8. Quando uma quantidade entra na composição de outra, esta diz-se *funcção* da primeira. Por exemplo, a expressão $a\,x^2+b\,x$ é uma *funcção* de x.

Para designar em geral uma funcção de x, escreve-se $F(x)$, sendo n'este caso a lettra F empregada como abreviatura da palavra *funcção*. A inicial variará, se forem diffentes as funcções. Escrever-se-ha, por exemplo, $F(x)$, $f(x)$ e $\varphi(x)$, para designar funcções de x, de natureza diversa, seja qual fôr a lei de sua composição ou formação.

9. *Valor numerico de uma quantidade algebrica*, é o que resulta quando em vez das lettras substituirmos os numeros que ellas representam, effectuando as operações ordenadas pelos signaes. Exemplo. Achar o valor numerico da expressão $\frac{a+b-x-y}{2a-5y}$, suppondo que $a=3$, $b=2$, $x=4$, $y=1$.

Ter-se-ha:

$$\frac{a+b-x-y}{2a-5y}=\frac{3+2-4-1}{2\times3-5\times1}=\frac{(3+2)-(4+1)}{6-5}$$
$$=\frac{0}{1}=0$$

O valor é por conseguinte *zero*.

10. **Quantidades negativas.**—Nos calculos algebricos figuram quantidades affectas do signal $+$, e outras affectas do signal $-$; as primeiras chamam-se *positivas*, as segundas *ne-*

gativas. E' d'estas que nos vamos occupar. Para melhor comprehensão, tome-se o seguinte exemplo:

Um negociante comprou fazendas por A *libras, vendendo-as depois por* B *libras. Pede-se o resultado da transacção.*

E' evidente que tendo o negociante dispendido com a compra de fazendas um numero de libras egual a a, e tendo-as vendido por b libras, a differença entre o preço da venda e o da compra dará o lucro ou prejuizo que lhe resultou da transacção effectuada. Se vender as fazendas por quantia superior á que empregou na compra, isto é, se b fôr maior do que a, a differença $b - a$ indicará ganho, e que os fundos augmentaram por este motivo. Se, pelo contrario, b fôr menor do que a, claro está que $a - b$ representará uma perda, e portanto uma diminuição de capital. N'este caso, a expressão $b - a$, que no primeiro caso representava augmento de capital, só representará agora uma diminuição, impossivel de realizar arithmeticamente. Algebricamente, comtudo, a expressão $b - a$ servirá sempre de indicar o resultado da transacção realizada; e não podendo fazer-se a subtracção, porque da quantidade menor, b, não se póde subtrahir outra maior, a, fal-a-hemos ao contrario, tirando de a o numero b, e affectaremos o resultado com o signal —; este signal denotará que o capital ou os fundos do negociante *diminuiram* em vez de *augmentar*.

Infinitos são os exemplos em que as grandezas se podem considerar sob duas accepções inteiramente contrarias, como additivas ou a sommar, como subtractivas ou a diminuir. São taes os ganhos e perdas do jogador, o avanço ou atrazo do relogio, as distancias percorridas por um movel sobre a sua trajectoria, para um ou para outro dos extremos d'esta, etc. Foi para abranger em geral estas duas accepções contrarias que se empregaram e empregam as *quantidades negativas*, originadas, como vimos, na subtracção.

Portanto, *quando n'uma subtracção o subtractivo fôr maior do que o additivo, convencionou-se subtrahir a menor quantidade da maior, e collocar á esquerda do resto o signal — para denotar esta mudança de ordem.*

11. Na expressão $b - a$, suppunhamos que b conserva um valor fixo e que a cresce a partir de zero. Obter-se-hão primeiramente resultados decrescentes, e quando a fôr egual a b, a differença $b - a$, será egual a zero. Se continuarmos a augmentar a, apparecerão quantidades negativas, que serão tanto maiores em valor absoluto quanto maior fôr a. Assim, por exemplo, se $b = 3$, e a tiver successivamente os valores

0, 1, 2, 3, os valores da differença $b - a$ serão respectivamente 3, 2, 1, 0, E continuando a a augmentar, tomando por exemplo os valores 4, 5, 6, etc., a mesma differença $b - a$ tornar-se-ha em $-1, -2, -3$, etc.

Porque estes valores negativos vêm depois dos positivos decrescentes 3, 2, 1, 0, convencionou-se considerál-os como menores do que zero; e porque as quantidades negativas que têem valor absoluto maior vêm depois das de menor valor, por isso se consideram como ~~superiores~~ inferiores a estas. Em virtude d'estas convenções, $-3 < 0$, $-7 < 2$, etc.

DO CALCULO ALGEBRICO

Operações

12. As operações effectuadas com as quantidades litteraes differem das praticadas com os numeros, em que estas apresentam o resultado final baseado no systema de numeração adoptado, sem que d'elle, e só por elle, se possa inferir qual a operação executada, emquanto que aquellas são apenas transformações das operações primitivamente indicadas n'outras destinadas a produzir resultado identico. As regras para esta transformação constituem o calculo algebrico.

13. As definições das operações dadas na arithmetica referem-se simplesmente a numeros positivos, e são portanto deficientes quando applicadas ás quantidades negativas. Effectivamente, se á somma de 7 com 5, a definição de addição dava sentido perfeitamente claro e definido, á da somma de -7 com -5 não dará significação de especie alguma. D'aqui, a necessidade de estabelecer, para as operações algebricas, novas definições que comprehendam todos aquelles casos que não puderam ser previstos ou considerados na arithmetica.

14. Para podermos definir com rigor a addição algebrica, diremos que *é operação cujo fim é sommar algebricamente differentes quantidades, isto é, sommar arithmeticamente os valores das quantidades do mesmo signal dando á somma o signal das parcellas, e subtrahir arithmeticamente os valores das quantidades de signaes contrarios, dando ao resto o signal da maior d'essas quantidades.*

Subtracção algebrica, é *operação cujo fim é achar a quantidade que sommada algebricamente com uma de duas quantidades dadas reproduza a outra.*

Esta definição abrange todos os casos que se possam dar.

Multiplicação algebrica de duas quantidades é *a operação que tem por fim obter o producto de seus valores absolutos, dando ao resultado o signal + ou —, conforme os dois factores tiverem ou não o mesmo signal.*

A definição de divisão dada na arithmetica, quadra tambem na Algebra. Temos, pois, que divisão algebrica ou arithmetica de duas quantidades é *a operação cujo fim é achar um dos factores do producto quando este e o outro factor forem dados.*

Nos numeros seguintes veremos como se justificam estas definições.

15. *Addição de monomios.*—**Regra**: *Para sommar dois monomios, escrevem-se uns adeante dos outros com seus respectivos signaes.*

Para esta regra admittiremos o seguinte lemma já demonstrado na arithmetica: *Todo o parenthese precedido do signal +, e que involver somma ou differença indicada poderá supprimir-se comtanto que se não mudem os signaes ás quantidades n'elle incerradas.*

Seja pois a expressão seguinte, em que supporemos $a > b$, e $c > d$:

$$(a-b)+(c-d)=a-b+c-d \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Os dois binomios $(a-b)$ e $(c-d)$ tornar-se-hão em monomios suppondo zero algum dos termos que os formam. Portanto, para considerarmos todos os casos de addição de monomios faremos as quatro hypotheses seguintes:

$$1.^a\begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases} \quad 2.^a\begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases} \quad 3.^a\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad 4.^a\begin{cases} a=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Pela primeira hypothese a expressão (A) torna-se em:

$$(+a)+(+c)=a+c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pela segunda hypothese a mesma expressão transforma-se em

$$(-b)+(-d)=-b-d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Em virtude da terceira hypothese a mesma expressão dá:

$$(+a)+(-d)=a-d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A quarta hypothese dá:

$$(-b)+(+c)=-b+c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Observando os resultados (1), (2), (3), (4), vemos que, quer se tratem de sommar dois monomios positivos, quer dois negativos, quer um positivo e outro negativo, quer um negativo e outro positivo, tudo se reduz a escrevêl-os em seguida uns dos outros com os seus signaes respectivos, o que justifica a regra enunciada.

Comprehende-se facilmente que, se tivessemos de addicionar mais de dois monomios, sommariamos primeiramente dois d'elles, ao resultado juntariamos o terceiro, ao novo resultado o quarto, e assim successivamente. Exemplo:

Sejam os monomios $+4a^2b, -3a^4bx^2, +7a^2, -5abc, +4a^4b^2, +2c^3$, que desejamos addicionar. Pela regra exposta, virá:

$$4a^2b - 3a^4bx^2 + 7a^2 - 5abc + 4a^4b^2 + 2c^3$$

Sejam ainda para sommar os seguintes monomios:

$$+2ax, +3a^2b, -4ax, +2a^2b, -5ax, +9c^2, +6ax, -5c^2, -7ax, +8a^2b$$

A somma será, em virtude da regra:

$$2ax + 3a^2b - 4ax + 2a^2b - 5ax + 9c^2 + 6ax - 5c^2 - 7ax + 8a^2b$$

ou, fazendo a reducção dos termos similhantes:

$$-8ax + 13a^2b + 4c^2$$

16. *Subtracção de monomios.* **Regra**: *Subtrae-se um monomio de outro, trocando o signal ao monomio subtractivo, e praticando a regra da addição.*

Invocaremos, para a dedução d'esta regra, o lemma seguinte já demonstrado na Arithmetica: *Podem supprimir-se os parentheses precedidos do signal — e involvendo differenças indicadas, comtanto que se troquem os signaes das quantidades n'elles incerradas.*

Seja a expressão seguinte, em que supporemos $a > b$ e $c > d$:

$$(a-b) - (c-d) = a - b - c + d \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Fazendo as mesmas considerações que se fizeram no n.º antecedente, a fim de tornar monomias as expressões binomias $(a-b)$ e $(c-d)$, e de attender a todos os casos possiveis, teremos que para as hypotheses

$$1.^a \begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases} \quad 2.^a \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases} \quad 3.^a \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad 4.^a \begin{cases} a=0 \\ d=0 \end{cases}$$

a expressão (B) adquire respectivamente as seguintes fórmas:

$$(+a) - (+c) = a - c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(-b) - (-d) = -b + d \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$(+a) - (-d) = a + d \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$(-b) - (+c) = -b - c \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

As expressões (1), (2), (3), (4) indicam-nos que quer se subtraiam dois monomios positivos, quer dois negativos, quer um negativo de outro positivo, quer um positivo de outro negativo, a regra supra-enunciada sempre se justifica.

Exemplos: de $4\,a^2 b^2 c^3$ subtrahir $-3\,a^4 b^2$. Pela regra será: $4\,a^2 b^2 c^3 + 3\,a^4 b^2$. De $-3\,x^2 y^3$ tirar $+5\,c^2$, resulta: $-3\,x^2 y^3 - 5\,c^2$, etc.

17. *Addição de polynomios*. Supponhamos que a $a - b$ se tem de juntar o polynomio $m - p + q$, isto é, que se pretende achar o valor da expressão

$$a - b + (m - p + q) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Se effectuarmos as operações indicadas pelos signaes entre as quantidades m, p e q, obteremos um certo resultado que representaremos por P. Portanto, a expressão (1) torna-se em

$$a - b + P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

e como é arbitraria a ordem dos termos (n.º 6), comtanto que os signaes se não alterem, a expressão (2) poderá escrever-se

$$P + a - b$$

Pondo n'esta em vez do resultado P o polynomio que o produziu, virá

$$(m - p + q) + a - b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

servindo o parenthese apenas para se considerarem como effectuadas as operações que elle incerra. E porque é evidente que elle se póde supprimir, quando no principio de uma expressão, sem que o valor d'esta se altere, será

$$(m - p + q) + a - b = m - p + q + a - b$$

E, porque (n.º 6) a ordem dos termos é arbitraria, virá finalmente

$$a - b + (m - p + q) = a - b + m - p + q$$

o que justifica a regra seguinte: *Sommam-se dois polynomios escrevendo em seguida aos termos do primeiro os do segundo sem lhes alterar os signaes.*

Escholio I. Se o segundo polynomio fosse uma quantidade negativa, $-P$, em logar de $+P$, a regra sería a mesma, e identico o resultado obtido. N'este resultado, os termos dos dois polynomios escrevem-se com seus respectivos signaes, uns após outros, como no primeiro caso.

Escholio II. Se os polynomios a sommar fossem mais de dois, applicariamos a regra aos dois primeiros, depois á somma d'estes e ao terceiro, em seguida ao resultado obtido e ao quarto, etc.

Escholio III. Quando houver termos similhantes, é preferivel na pratica o collocál-os uns debaixo dos outros com os seus signaes, e effectuar depois a somma e a reducção ao mesmo tempo. Exemplo:

Para sommar os polynomios $(4\,a^4 - 5\,a^2 c + 3\,d^3)$, $-(3\,a^4$

$+3bc-5d^3)$, $(2a^2c-7bc+8d^3)$, escrevel-os-hemos como segue:

$$\begin{array}{r} 4a^4-5a^2c+3d^3+3bc \\ -3a^4+2a^2c-5d^3-7bc \\ +8d^3 \\ \hline a^4-3a^2c+6d^3-4bc \end{array}$$

18. *Subtracção de polynomios.* Seja o polynomio $a+b+c$ de que se ha de subtrahir o polynomio $m-p+q$. Este polynomio tem um certo valor P, que resulta de se effectuarem as operações entre os seus termos, valor que terá signal positivo ou negativo conforme os valores das quantidades que o formam. Por conseguinte, seu valor absoluto conservar-se-ha o mesmo, variando sómente o signal, se nós lhe trocassemos os signaes $+$ dos termos em $-$, e vice-versa. Logo, em virtude da definição de subtracção dada acima, para subtrahirmos o polynomio P, ou $m-p+q$, do polynomio $a-b+c$, devemos trocar os signaes ao primeiro, e sommál-o assim alterado com o segundo. Exemplo:

Do polynomio $5x^4-3x^2y+4x^3$ tirar $2b-4c^2+6x^5$

Applicando a regra, tem-se:

$$5x^4-3x^2y+4x^3-2b+4c^2-6x^5$$

Escholio I. Havendo mais de um polynomio subtractivo, mudam-se os signaes a todos os subtractivos, e applicar-se-ha a regra da addição.

Escholio II. Havendo termos similhantes, depois de trocados os signaes aos termos dos subtractivos, escrever-se-hão como acima se disse (n.º 17, obs. III.)

19. *Multiplicação de monomios.* Na multiplicação dos monomios temos de attender aos *signaes,* aos *coefficientes,* ás *lettras* e aos *expoentes.* Estabeleceremos, porêm, antes de passarmos ás considerações especiaes de cada um d'estes quatro elementos, os lemmas de que carecemos para comprehensão do que vamos dizer.

Lemma I. *Póde multiplicar-se uma quantidade por um producto de muitos factores, multiplicando-a successivamente por cada um d'elles.* Isto é: $m \times abc = abcm = mabc$.

Lemma II. *Na multiplicação successiva de muitos factores, qualquer numero d'elles póde substituir-se por seu producto effectuado.* Isto é: $a.b.c = a(bc)$.

Lemma III. *Multiplicam-se ou dividem-se as potencias da mesma base sommando ou subtrahindo os expoentes.* Isto é: $a^3 \times a^5 = a^8$; $a^6 : a^2 = a^4$.

Porque suppomos já demonstradas na Arithmetica estas proposições, não o faremos agora, passando ás considerações particulares sobre os

a) Signaes. A regra dos signaes é a seguinte: *Na multiplicação de dois monomios, affectar-se-ha o producto com o signal* $+$, *quando os factores tiverem ambos signal positivo ou negativo; e com o signal* $-$, *quando ambos os factores tiverem signaes contrarios.*

Para justificar esta regra, tomemos a expressão

$$(a-b)\times(c-d)=ac-bc-ad+bd\ldots\ldots(A)$$

já demonstrada na Arithmetica para o caso de ser $a>b$, e $c>d$.

Para que as duas expressões binomias $a-b$, e $c-d$, se tornem em monomias, faremos as quatro seguintes hypotheses:

$$1.^{\text{a}}\ \begin{cases}b=0\\d=0\end{cases}\ 2.^{\text{a}}\ \begin{cases}a=0\\c=0\end{cases}\ 3.^{\text{a}}\ \begin{cases}a=0\\d=0\end{cases}\ 4.^{\text{a}}\ \begin{cases}b=0\\c=0\end{cases}$$

Em virtude d'ellas, a expressão (A) torna-se nas seguintes:

$$(+a)\times(+c)=+ac\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(-b)\times(-d)=+bd\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$(-b)\times(+c)=-bc\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(+a)\times(-d)=-ad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Observando estas expressões, vemos que a regra dos signaes está plenamente demonstrada para todos os casos. Pelos (1) e (2), vê-se que o producto é positivo quando os dois factores têem o mesmo signal; e pelos (3) e (4) vê-se que elle é negativo quando os dois factores têem signaes contrarios.

b) Coefficientes. Emquanto aos coefficientes, a regra é multiplicál-os, fundando-se no lemma II.

c) Lettras. As lettras communs aos dois factores escrevem-se uma só vez com expoente egual á somma de seus expoentes, em virtude do lemma III. As lettras não communs aos dois factores escrevem-se com seus respectivos expoentes. Quando não houver expoente manifesto, suppor-se-ha ser egual a 1.

d) Expoentes. Aos expoentes, pelo lemma III, applica-se o preceito antecedente.

Exemplifiquemos. Sejam os dois monomios $5a^2b^2cx^2$ a multiplicar por $6ab^2c^3x^2y^4$; será

$$5a^2b^2cx^2\times 6ab^2c^3x^2y^4=30a^3b^5c^4x^4y^4$$

Do exposto, concluiremos a seguinte regra: *Para multiplicar dois monomios, effectuar-se-ha o producto dos coefficientes; escrever-se-hão as lettras dos dois monomios, cada uma por uma só vez, dando a cada uma d'ellas para expoente a somma dos expoentes que tiverem nos factores. As lettras que figurarem só n'um* *factor escrever-se-hão uma só vez no producto com os expoentes respectivos. Emquanto aos signaes, daremos ao producto o signal +, quando ambos os factores tiverem signaes identicos; e o signal —, quando os signaes dos factores forem contrarios.*

Escholio. Pela regra exposta se vê que quando se mudar o signal a um dos factores de um producto de dois, o producto mudará de signal tambem; e que se se trocarem os signaes a ambos os factores, o signal do producto ficará invariavel.

20. *Multiplicação de polynomios por monomios e vice-versa.* Seja o polynomio $a - b + c$ a multiplicar pelo monomio m. Poderemos considerar tres casos: m inteiro e positivo, m inteiro e negativo, e m fraccionario. No primeiro caso temos que, formando-se o producto do multiplicando da mesma fórma que o multiplicador se fórma da unidade, será

$$(a - b + c)m = \underbrace{a - b + c + a - b + c + a - b + c \ldots\ldots}_{m \text{ vezes}}$$
$$= a + a + a + \ldots. - b - b - b \ldots. + c + c + c \ldots.$$
$$= am - bm + cm$$

Se em vez de $(a - b + c)m$, tivessemos $m(a - b + c)$, por isso que a ordem dos factores é arbitraria, a operação effectuar-se-hia da mesma fórma que acima, visto como

$$m(a - b + c) = (a - b + c)m$$

No caso de m ser negativo, pelo que fica dito no escholio do n.º 19, o producto seria de signal contrario ao de $a - b + c$ por m positivo; e, como para mudar o signal de um polynomio, basta mudar o de cada um de seus termos, segue-se que teriamos

$$(a - b + c) \times - m = - am + bm - cm$$

Escholio. A egualdade

$$(a - b + c)m = am - bm + cm$$

mostra que, quando os termos de um polynomio $am - bm + cm$ têem um factor commum a, o poderemos supprimir em cada um d'elles, e multiplicar o polynomio assim modificado por esse factor. E' isto que se chama *tirar ou pôr em evidencia um factor commum.* Esta operação é de grande utilidade; serve para ordenar qualquer polynomio em relação a uma lettra que existe com o mesmo expoente em muitos termos. Effectivamente, para ordenar (n.º 7)

$$a^3 + a^2 x + a x^2 - b^3 + b^2 x - b x^2 - c^2 x$$

relativamente ás potencias decrescentes de x, notaremos: 1.º que x^2 é factor commum aos dois termos $a x^2$, $b x^2$; 2.º que x é tambem factor commum dos tres termos $a x^2$, $b^2 x$, $c^2 x$. Applicando pois a regra precedente a estes dois grupos de termos, daremos ao polynomio proposto a seguinte fórma

$$(a-b)x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^3-b^3$$

Por analogia com os polynomios ordenados que têem coefficientes numericos, cada um dos multiplicadores algebricos $a-b$, $a^2+b^2-c^2$, das differentes potencias da lettra principal recebeu o nome de coefficiente.

Estes coefficientes tambem se podem escrever, em vez de os incerrar dentro de parentheses, d'esta fórma:

$$\left.\begin{array}{r} a \\ -b \end{array}\right| x^2 \left|\begin{array}{r} +a^2 \\ +b^2 \\ -c^2 \end{array}\right| x + \begin{array}{r} a^3 \\ -b^3 \end{array}$$

Quando tivermos de multiplicar o polynomio $a-b+c$ pelo monomio fraccionario $\frac{m}{n}$, procederemos ainda do mesmo modo. Effectivamente, se $\frac{m}{n}$ é multiplicador, multiplicar $a-b+c$ por $\frac{m}{n}$, é dividir $a-b+c$ em n partes eguaes, o que dá $\frac{a-b+c}{n}$, e multiplicar este resultado por m. Ora pela definição de quebrado, $\frac{a-b+c}{n}$ indicará que, tendo-se dividido a unidade em n partes eguaes, d'ellas se tomou numero egual a $a-b+c$; isto é, tomou-se $\frac{a}{n}$, $-\frac{b}{n}$ e $\frac{c}{n}$ partes. Por conseguinte, $\frac{a-b+c}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}$ Multiplicando pois $\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}$ por m, que é o primeiro dos casos anteriores, ter-se-ha

$$(a-b+c)\times\frac{m}{n}=\frac{a-b+c}{n}\times m=\left(\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}\right)m$$

$$=\frac{a}{n}\times m-\frac{b}{n}\times m+\frac{c}{n}\times m$$

$$=a\times\frac{m}{n}-b\times\frac{m}{n}+c\times\frac{m}{n}$$

Do exposto, deduziremos a seguinte regra: *Multiplica-se um polynomio por um monomio, e vice-versa, multiplicando* *cada termo do polynomio pelo monomio, e seguindo o preceituado para a multiplicação de monomios.*

21. *Multiplicação de polynomios.* Seja o polynomio $(m-n+p)$ a multiplicar por $(a+b-c)$. Este ultimo terá um valor T se effectuarmos as operações indicadas pelos signaes entre seus termos. Reduz-se, pois, a questão a multiplicar $(m-n+p)$ por T, isto é, á multiplicação de um polynomio por um monomio. Teremos, pois,

$$(m-n+p)\times T = mT - nT + pT$$

e restabelecendo em vez de T o seu valor, e effectuando as operações, virá:

$$(m-n+p)T = mT - nT + pT = m(a+b-c) \\ -n(a+b-c)+p(a+b-c)$$

$$(m-n+p)(a+b-c) = am + bm - cm - an - bn - cn \\ + ap + bp - cp$$

ou, por ser arbitraria a ordem dos termos (n.º 6),

$$(m-n+p)(a+b-c) = am - an + ap + bm - bn + bp \\ - cm + cn - cp$$

D'onde se deduz a seguinte regra: *Para effectuar a multiplicação de dois polynomios, multiplicam-se successivamente todos os termos do multiplicando por cada termo do multiplicador, conservando os signaes do multiplicando quando o termo do multiplicador tenha o signal* $+$ *e mudando-os quando este termo tenha o signal* $-$

Escholio I. Se nos dois polynomios considerarmos todos os termos, tomados com seus respectivos signaes, como monomios isolados, se depois multiplicarmos successivamente os termos do multiplicando por cada termo do multiplicador, e se depois sommarmos todos os productos parciaes, é evidente que se obterá o mesmo resultado que pela regra anterior.

Escholio II. Quando houver mais de dois polynomios a multiplicar, convirá obter primeiramente o producto de dois, multiplicar em seguida este resultado por outro polynomio, o novo resultado por outro, etc.

22. Dissemos (n.os 7 e 20) o que era *ordenar* um polynomio em relação ás potencias crescentes ou decrescentes de certa lettra *principal.* Quando um polynomio contiver termos de todos os graus, relativamente a essa lettra, desde zero até ao mais elevado, chamar-se-ha *completo.* No caso contrario dir-se-ha *incompleto.*

O ordenar os polynomios em relação ás potencias crescentes ou decrescentes de certa lettra tem vantagens na pratica da multiplicação, porque nos mostra a lei segundo a qual ha-de proceder o producto.

Exemplo: multiplicar $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ por $x^2 + p\,x + q$

Disporemos o calculo como segue:

$$\begin{array}{lllllll}
 & a\,x^3 + & b\,x^2 & + \; c\,x & + d & & \\
 & x^2 + & p\,x & + \; q & & & \\
\hline
\text{Productos} & a\,x^5 + & b\,x^4 & + \; c\,x^3 & + d\,x^2 & & \\
\text{parciaes} & & + \; a\,p\,x^4 & + \; b\,p\,x^3 & + c\,p\,x^2 & + d\,p\,x & \\
 & & & + \; a\,q\,x^3 & + b\,q\,x^2 & + c\,q\,x & + d\,q \\
\hline
\text{Producto} & a\,x^5 + b & x^4 + c & x^3 + d & x^2 + d\,p & x + d\,q & \\
\text{total...} & \quad + a\,p & \quad + b\,p & \quad + c\,p & \quad + c\,q & & \\
 & & \quad + a\,q & \quad + b\,q & & &
\end{array}$$

Como os dois polynomios factores estavam já ordenados relativamente ás potencias decrescentes de x, collocámos um d'elles, o multiplicador, por debaixo do multiplicando; e, applicando a regra dada (n.º 21), multiplicámos cada termo do multiplicador por todos os do multiplicando, obtendo os productos parciaes, que sommados, deram, feita a reducção dos termos similhantes, o producto total:

$$a\,x^5 + (b + a\,p)\,x^4 + (c + b\,p + a\,q)\,x^3 + (d + c\,p + b\,q)\,x^2 + (d\,p + c\,q)\,x + d\,q$$

Se os polynomios são incompletos, deixam-se intervallos para poderem collocar-se os termos similhantes uns inferiormente aos outros.

Exemplo. Multiplicar $4\,a\,m^3\,y^4 - b\,m\,y^2 + c\,y$ pelo polynomio $a\,y^2 + x\,y$.

$$\begin{array}{llll}
 & 4\,a\,m^3\,y^4 - b\,m\,y^2 + c\,y & & \\
 & \quad a\,y^2 + b\,y & & \\
\hline
\text{Productos} & 4\,a^2\,m^3\,y^6 & - a\,b\,m\,y^4 + a\,c\,y^3 & \\
\text{parciaes} & \quad + 4\,a\,b\,m^3\,y^5 & - b^2\,m\,y^3 + b\,c\,y^2 & \\
\hline
\text{Producto} & 4\,a^2\,m^3\,y^6 + 4\,a\,b\,m^3\,y^5 - a\,b\,m\,y^4 + a\,c & y^3 + b\,c\,y^2 & \\
\text{total....} & \qquad\qquad - b^2\,m & &
\end{array}$$

ou $4\,a^2\,m^3\,y^6 + 4\,a\,b\,m^3\,y^5 - a\,b\,m\,y^4 + (a\,c - b^2\,m)\,y^3 + b\,c\,y^2$

Quando os coefficientes das diversas potencias da lettra principal são polynomios, segue-se ainda a regra geral acima exposta (n.º 21).

23. A'cerca da multiplicação algebrica faremos as considerações seguintes:

Escholio I. Se os polynomios que se multiplicam forem *homogeneos* (n.º 5), *seu producto tambem o será.* Isto conclue-se das regras supra-expostas com respeito ás lettras e aos expoentes; assim como tambem se conclue, para o caso sujeito, que *o grau de cada termo do producto deve ser egual á somma* *dos graus de dois termos quaesquer do multiplicando e do multiplicador.*

Este escholio é importante para que na pratica se conheçam ou descubram facilmente os erros, se os houver, de um producto. Por exemplo, se n'um producto que deve ser homogeneo, a somma dos expoentes de qualquer termo fôr egual a 4, sendo 6 a de todos os restantes, haverá manifestamente erro na somma dos expoentes; e far-se-ha, portanto, de novo a multiplicação dos dois termos que deram o producto errado.

Escholio II. Quando na multiplicação de dois polynomios o producto não tiver reducção de termos similhantes, *o numero total dos termos do producto será egual ao producto do numero dos termos do multiplicando pelo dos do multiplicador.* E' consequencia da regra dada no n.º 21, e significa, por exemplo, que se o multiplicando tem 4 termos, e o multiplicador 3, o producto ha de ter 12. Serve tambem este escholio para nos advertir, pelo producto, se houve, ou não, omissão na consideração de todos os termos dos factores.

Escholio III. Quando no producto houver termos similhantes, a reducção d'estes póde produzir um numero de termos menor do que o producto dos dois factores. Notar-se-ha, todavia, que ha sempre dois termos que se não reduzem, e são: *o que provêm da multiplicação dos dois termos do multiplicando e multiplicador que tenham expoente mais elevado na lettra principal, e o que provêm da multiplicação dos dois termos dos factores em que o expoente da mesma lettra seja o menor.* Por conseguinte, o producto de dois polynomios *tem pelo menos dois termos.*

24. Como applicação da multiplicação algebrica, tratemos de achar, pelas regras expostas, os productos

$$(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$
$$(a-b)(a-b)=(a-b)^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

1.º
$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad\;\; +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (A) \end{array}$$

2.º

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - a\,b \qquad \\ - a\,b + b^2 \\ \hline a^2 - 2\,a\,b + b^2 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (B)$$

3.º

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + a\,b \qquad \\ - a\,b - b^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (C)$$

A expressão *(A)* diz-nos que *o quadrado da somma de duas quantidades é egual ao quadrado da primeira, mais o dobro da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

Pelo resultado *(B)* conclue-se que *o quadrado da differença de duas quantidades é egual ao quadrado da primeira, menos o dobro da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

O producto *(C)* indica-nos que *a somma de duas quantidades multiplicada pela sua differença é egual á differença dos quadrados das duas quantidades.*

Estas proposições são de toda a vantagem no calculo algebrico.

25. *Divisão de monomios.* Na divisão dos monomios temos de attender a quatro elementos, a saber: aos *signaes,* aos *coefficientes,* ás *lettras* e aos *expoentes.*

a) Signaes. A regra dos signaes é egual á analoga da multiplicação dos monomios; isto é, *quando os dois termos têem signal identico, o quociente é positivo; no caso contrario, é negativo.* A razão d'isto é obvia, porque, como o dividendo é egual ao producto algebrico do divisor pelo quociente, é claro que o signal d'este deve ser tal, que na sua multiplicação pelo divisor, se reproduza o do dividendo. Por conseguinte diremos que $+ : + = +$; $- : - = +$; $+ : - = -$; $- : + = -$

b) Coefficientes. Se notarmos que o quociente de dois monomios não póde ser polynomio, porquanto o seu producto por um monomio seria tambem polynomio, veremos que o coefficiente do quociente se obterá dividindo o coefficiente do monomio dividendo pelo do divisor. Se a divisão exacta fôr impossivel, o quociente indicar-se-ha escrevendo em fórma de quebrado os coefficientes do dividendo e do divisor.

c) Lettras e expoentes. Emquanto ás lettras communs aos dois monomios que se dividem, ellas figurarão uma só vez no quociente com expoente egual á differença dos expoentes dos dois termos da divisão. Se o expoente do divisor fôr, para a mesma lettra, superior ao do dividendo, a lettra escrever-se-ha em denominador, com expoente egual á differença dos dois. Exemplo: Dividir $25\,a^4\,b^2\,c\,d^3\,x^4$ por $5\,a^2\,b^2\,d^2\,x^3$. Teremos

$$\frac{25\,a^4\,b^2\,c\,d^3\,x^4}{5\,a^2\,b^2\,d^2\,x^3} = +5\,a^2\,c\,d\,x, \text{ ou simplesmente } 5\,a^2\,c\,d\,x.$$

Dividimos o coefficiente 25 por 5, o que deu 5, e escrevemos depois a^2 como quociente de a^4 por a^2; 1, (que não é preciso notar) como quociente de b^2 por b^2; c, como quociente de c por 1; d, como quociente de d^3 por d^2; x, como quociente de x^4 por x^3.

Tome-se outro exemplo, e seja o dividir $18\,a^4\,b^2\,m^3\,p^5$ por $6\,a^5\,b^3\,m^2\,p^7$. Teremos:

$$\frac{18\,a^4\,b^2\,m^3\,p^5}{6\,a^5\,b^3\,m^2\,p^7} = \frac{3\,m}{a\,b\,p^2}$$

26. *Divisão de polynomios por monomios.* Porque dois monomios multiplicados entre si nunca darão um polynomio, segue-se que o quociente da divisão de um polynomio por um monomio ha-de forçosamente ser polynomio, e tal que, multiplicado pelo monomio divisor, reproduza o dividendo. Notando tambem que o dividendo é o producto do divisor pelo quociente, e que a regra da multiplicação de polynomios por monomios nos diz que devemos multiplicar todos os termos do multiplicando pelo monomio multiplicador, segue-se que para se obterem os termos do quociente temos de dividir cada um dos termos do dividendo pelo monomio divisor. A divisão de que se trata reduz-se, pois, a uma serie de divisões de monomios, devendo estas fazer-se tantas vezes quantos os termos do dividendo. Exemplo:

Dividir $24\,a^2\,b^2 - 15\,a^3\,b^2\,x^2 + 24\,a^3\,b^5\,x^4 + 27\,a^2\,b^4$ por $3\,a\,b$.

Temos $$\frac{24\,a^2\,b^2 - 15\,a^3\,b^2\,x^2 + 24\,a^3\,b^5\,x^4 + 27\,a^2\,b^4}{3\,a\,b}$$

$$= 8\,a\,b - 5\,a^2\,b\,x^2 + 8\,a^2\,b^4\,x^4 + 9\,a\,b^3$$

Não fizemos mais do que praticar a regra da divisão de monomios acima dada (n.º 25), d'onde concluiremos que, para dividir um polynomio por um monomio, *se dividirão todos os termos do dividendo successivamente pelo divisor.*

Escholio. Os casos de impossibilidade são os mesmos da divisão de monomios; isto é, a divisão será sempre inexacta quando houver no dividendo termos que não sejam divisiveis pelo divisor.

27. *Divisão de polynomios.* O quociente da divisão de dois polynomios póde ser exacto ou inexacto. No primeiro caso a divisão repousa nos dois principios seguintes:

1.º Se dois polynomios M e N, se ordenarem da mesma fórma relativamente ás potencias de uma lettra principal, e se houver terceiro polynomio P ordenado de modo egual, que, multiplicado pelo segundo N, reproduza M: o 1.º termo de P obter-se-ha dividindo o 1.º de M pelo 1.º de N.

2.º Subtrahindo do dividendo M o producto do primeiro termo do quociente P pelo divisor N, obter-se-ha um resto que dividido por N dará a somma algebrica dos termos restantes de P.

D'estes dois principios dimana a seguinte regra:

Depois de ordenados o dividendo e o divisor relativamente ás potencias da mesma lettra, divida-se o primeiro termo da esquerda do dividendo pelo primeiro termo da esquerda do divisor, e achar-se-ha assim o primeiro termo do quociente. Multiplique-se este termo por todo o divisor, e subtraia-se o producto do dividendo proposto. O primeiro termo do resto obtido, dividido pelo primeiro termo do divisor, dará segundo termo para o quociente. Multiplicando o segundo termo achado por todo o divisor, e subtrahindo o producto do dividendo, teremos novo resto, cujo primeiro termo dividido pelo primeiro do divisor dará terceiro termo para o quociente; e assim successivamente.

Exemplo. Seja o polynomio $6a^3 - a^2b - 12ab^2$, a dividir por $2a - 3b$. Disporemos o calculo como segue:

$$\begin{array}{lrl|l}
\textit{Dividendo}\ldots & 6a^3 - a^2b - 12ab^2 & & 2a - 3b\ldots\ \textit{Divisor} \\ \cline{4-4}
 & -6a^3 + 9a^2b & & 3a^2 + 4ab\ \ \textit{Quociente} \\ \cline{2-2}
1.^{\circ}\ \textit{resto}\ldots\ldots & 8a^2b - 12ab^2 & & \\
 & -8a^2b + 12ab^2 & & \\ \cline{2-2}
2.^{\circ}\ \textit{resto}\ldots\ldots & 0 & &
\end{array}$$

Os dois polynomios estão ordenados relativamente ás potencias decrescentes da mesma lettra a. Dividimos o primeiro termo, $6a^3$, do dividendo por $2a$, primeiro termo do divisor, e obtivemos $3a^2$, que multiplicamos pelo divisor $2a - 3b$, obtendo o producto $6a^3 - 9a^2b$, cuja subtracção do dividendo produziu o resto $8a^2b - 12ab^2$. O primeiro termo d'este resto, $8a^2b$, dividido por $2a$, produziu $+4ab$, que multiplicado pelo divisor deu o producto $8a^2b - 12ab^2$, que subtrahido do 2.º resto deu zero.

Dêmos ainda outro exemplo, e seja o polynomio:

$$4a^4 + b^4 - 5a^2b^2 \text{ a dividir por } b^2 + 2a^2 + 3ab$$

Ordenando os dois polynomios relativamente ás potencias decrescentes de a, e dispondo o calculo, como acima, vem:

$$\begin{array}{r|l}
4a^4 - 5a^2b^2 + b^4 & 2a^2 + 3ab + b^2 \\ \cline{2-2}
-4a^4 - 6a^3b - 2a^2b^2 & 2a^2 - 3ab + b^2 \\ \cline{1-1}
-6a^3b - 7a^2b^2 + b^4 & \\
+6a^3b + 9a^2b^2 + 3ab^3 & \\ \cline{1-1}
2a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 & \\
-2a^2b^2 - 3ab^3 - b^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Tanto n'este exemplo como no anterior, escrevemos os restos já com os signaes trocados para se poder effectuar a subtracção, como ordena a regra da subtracção de polynomios.

28 *Escholio I*. Quando a divisão fôr possivel, isto é, quando houver para quociente um polynomio que multiplicado pelo divisor reproduza exactamente o dividendo: o 1.º termo do dividendo (ordenado do mesmo modo que o divisor) será divisivel pelo primeiro termo d'este; o mesmo succederá aos ultimos termos de ambos; e o resto será zero.

Escholio II. A divisão será sempre impossivel nos seguintes casos:

1.º Quando os termos primeiro e ultimo do dividendo não fôrem divisiveis por eguaes termos do divisor, suppondo os polynomios ordenados do mesmo modo.

2.º Quando o primeiro termo de um resto não fôr divisivel pelo primeiro termo do divisor.

3.º Quando no decurso da operação obtivermos termo de grau inferior ao que deve ter o ultimo do quociente, relativamente á lettra principal. Conheceremos *a priori* o grau do ultimo termo do quociente dividindo os ultimos termos do dividendo e divisor.

Escholio III. Dissémos que polynomios *inteiros* em relação a uma lettra são os que não a contêem nem em denominador nem debaixo de radicaes. As regras acima-expostas, deduzidas para estes polynomios, podem tambem applicar-se a polynomios que se não digam inteiros relativamente a uma lettra. Daremos um exemplo.

Seja o polynomio $1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ a dividir por

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Disporemos o calculo como se segue:

$$\begin{array}{l|l}
1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} & 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ \hline
-1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & 1 + \frac{1}{x} \\ \hline
\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} & \\
\quad -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} & \\ \hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

Como exemplo de divisões impossiveis ou inexatas, daremos o seguinte: $\frac{a}{a+b}$ Teremos

$$\begin{array}{l|l}
a & a + b \\ \hline
-a - b & 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline
\quad -b & \\
\quad +b + \frac{b^2}{a} & \\ \hline
\qquad \frac{b^2}{a} & \\
\qquad -\frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} & \\ \hline
\qquad\quad -\frac{b^3}{a^2} & \\
\qquad\quad +\frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} & \\ \hline
\qquad\qquad +\frac{b^4}{a^3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ etc.} &
\end{array}$$

Das fracções algebricas

29. Vimos nos numeros antecedentes por occasião de tratarmos da divisão de monomios que muitas vezes a divisão se não podia fazer exactamente. N'este caso indicava-se o quociente, e é este quociente indicado que se chama *fracção algebrica:* o dividendo é o numerador; o divisor é o denominador.

30. Para simplificarmos as fracções algebricas precisamos demonstrar primeiramente o seguinte principio: *qualquer fracção algebrica não muda de valor quando seus termos se multiplicarem ou dividirem, simultaneamente, pela mesma quantidade.*

Seja a fracção $\frac{A}{B}$; queremos provar que $\frac{A+m}{B+m}$ e $\frac{A:m}{B:m}$ são eguaes a $\frac{A}{B}$. Representa se o quociente $\frac{A}{B}$ por Q; teremos:

$$\frac{A}{B} = Q, \text{ d'onde } A = B \times Q$$

multiplicando ambos os membros d'esta egualdade por m, vem

$$A\,m = B\,Q\,m = B\,m \times Q$$

e dividindo ambos os membros por $B\,m$, tem-se

$$\frac{A\,m}{B\,m} = Q$$

e por ser $Q = \frac{A}{B}$, temos: $\frac{A\,m}{B\,m} = \frac{A}{B}$

Egualmente se demonstraria que $\frac{A:m}{B:m} = \frac{A}{B}$

31. Simplificar um quebrado é supprimir aos seus termos os factores communs. Esta operação é baseada no principio do numero antecedente. Se os termos da fracção dada forem monomios, facil será a sua simplificação. Por exemplo para simplificar $\frac{24\,a^2\,b^3\,c^4\,d^5\,x^2}{3\,b^2\,c^6\,x^4}$

Veremos que 3, b^2, c^4, e x^2 são factores communs aos dois termos, e que portanto virá

$$\frac{24\,a^2\,b^3\,c^4\,d^5\,x^2}{3\,b^2\,c^6\,x^4} = \frac{8\,a^2\,b\,d^5}{c^2\,x^2}$$

Quando os termos da fracção sejam polynomios, apezar de um pouco mais difficil e de exigir mais pratica, a simplificação effectuar-se-ha procurando os factores monomios ou polynomios que os dois termos incerrarem.

Exemplo. Seja $\dfrac{8\,a^3 - 16\,a^2\,b + 8\,a\,b^2}{4\,a^3 - 4\,a^2\,b}$

Este quebrado póde escrever-se

$$\frac{8\,a\,(a^2 - 2\,a\,b + b^2)}{4\,a^2\,(a - b)}$$

E, notando que $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$, teremos:

$$\frac{8\,a\,(a^2 - 2\,a\,b + b^2)}{4\,a^2\,(a - b)} = \frac{8\,a\,(a - b)^2}{4\,a^2\,(a - b)}$$

e tambem: $\dfrac{8\,a\,(a - b)^2}{4\,a^2\,(a - b)} = \dfrac{8\,a\,(a - b)}{4\,a^2} = \dfrac{2(a - b)}{a}$.

Seja ainda:

$$\frac{5\,x^3 - x^2 + 5}{5\,x^2 + 4\,x - 1}$$

Fazendo a divisão ao modo ordinario, resulta:

$$\frac{5\,x^3 - x^2 + 5}{5\,x^2 + 4\,x - 1} = x - 1 + \frac{5\,x + 4}{5\,x^2 + 4\,x - 1}$$

31. Reduzem-se quebrados ao mesmo denominador *multiplicando os dois termos de cada um pelo producto dos denominadores dos outros.* Exemplo: Os quebrados $\dfrac{3\,a^2}{4\,b^2}$, $\dfrac{5\,b^4}{3\,x^2}$, $\dfrac{7\,a\,x}{4\,b\,c}$, reduzem-se ao mesmo denominador d'esta fórma:

$$\frac{3\,a^2 \times 3\,x^2 \times 4\,b\,c}{4\,b^2 \times 3\,x^2 \times 4\,b\,c},\ \frac{5\,b^4 \times 4\,b^2 \times 4\,b\,c}{3\,x^2 \times 4\,b^2 \times 4\,b\,c},\ \frac{7\,a\,x \times 4\,b^2 \times 3\,x^2}{4\,b\,c \times 4\,b^2 \times 3\,x^2}$$

ou $\dfrac{36\,a^2\,b\,c\,x^2}{48\,b^3\,c\,x^2}$, $\dfrac{80\,b^7\,c}{48\,b^3\,c\,x^2}$, $\dfrac{84\,a\,b^2\,x^3}{48\,b^3\,c\,x^2}$.

Poderiamos reduzir estes, ou outros quaesquer quebrados, ao mesmo denominador, reduzindo-os ao *menor denominador commum.* Para isto, *achariamos o menor multiplo commum dos denominadores, e dividiriamos este por cada denominador, multiplicando em seguida os dois termos de cada quebrado pelo quociente obtido.*

Sejam, por exemplo, os quebrados

$$\frac{5\,a}{2\,a^2 + 2\,a\,x},\ \frac{3\,b\,c}{6(a^2 - x^2)},\ \frac{4\,a\,x}{3\,(a - x)^2}$$

Decompondo em factores os denominadores, teremos:

$$2a^2 + 2ax = 2a(a+x)$$
$$6(a^2 - x^2) = 6(a+x)(a-x)$$
$$3(a-x)^2$$

O menor multiplo commum, devendo formar-se do producto dos factores communs e não communs ás expressões dadas, será

$$6a(a+x)(a-x)^2$$

e, portanto, os quebrados propostos tornam-se em

$$\frac{15a(a-x)^2}{6a(a+x)(a-x)^2}, \quad \frac{3abc(a-x)}{6a(a+x)(a-x)^2},$$
$$\frac{8a^2x(a+x)}{6a(a+x)(a-x)^2}$$

Quando os factores se não podem descobrir com facilidade, procurar-se-ha o maximo divisor commum dos denominadores.

33. *Operações sobre os quebrados. Addição e subtracção.* Formam-se ou subtraem-se quebrados que tenham o mesmo denominador, *sommando ou subtrahindo os numeradores e dando á somma ou differença o denominador commum.*

Effectivamente, pela regra da divisão de polynomios por monomios, é $\dfrac{m-p+q-r}{n} = \dfrac{m}{n} - \dfrac{p}{n} + \dfrac{q}{n} - \dfrac{r}{n}$

Quando os denominadores das fracções sejam differentes, reduzir-se-hão estas ao mesmo denominador.

34. *Multiplicação.* O producto de duas ou mais fracções *obtem-se, multiplicando-as termo a termo.* Sejam as fracções $\dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{r}, \dfrac{t}{s}$, a cujos valores respectivos chamaremos q, q', q''. Será pois

$$\frac{m}{n} = q, \quad \frac{p}{r} = q', \quad \frac{t}{s} = q''$$

Por definição de divisão tira-se d'aqui:

$$m = nq, \quad p = rq', \quad t = sq''$$

Multiplicando ordenadamente estas egualdades, temos

$$m \times p \times t = q \times q' \times q'' \times n \times r \times s$$

d'onde $\dfrac{m\,p\,t}{n\,r\,s} = q\,q'\,q'' = \dfrac{m}{n} \times \dfrac{p}{r} \times \dfrac{t}{s}$

35. *Divisão.* Dividem-se quebrados por dois modos: ou

invertendo os termos ao quebrado divisor, e praticando depois a regra da multiplicação, ou dividindo-os termos a termo. Isto é, se os quebrados forem, por exemplo, $\frac{m}{n} : \frac{p}{r}$ teremos

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{r} = \frac{m}{n} \times \frac{r}{p} = \frac{m:p}{n:r}$$

Effectivamente, chamando q e q' aos dois valores dos quebrados, vem

$$\frac{m}{n} = q, \quad \frac{p}{r} = q'$$

d'onde $m = n\,q, \quad p = r\,q'$

egualdades que, divididas ordenadamente, dão

$$\frac{m}{p} = \frac{n\,q}{r\,q'} = \frac{n}{r} \times \frac{q}{q'}$$

e d'aqui, multiplicando por $\frac{r}{n}$, temos $\frac{m\,r}{p\,n} = \frac{q}{q'} = \frac{m}{n} : \frac{p}{r}$

Provado que $\frac{m}{n} : \frac{p}{r} = \frac{m\,r}{p\,n}$, tira-se, dividindo ambos os termos por $p\,r$

$$\frac{m\,r}{n\,p} = \frac{m\,r : p\,r}{n\,p : p\,r} = \frac{m:p}{n:r}$$

e portanto

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{r} = \frac{m:p}{n:r}$$

36. *Expoente zero, e expoente negativo.* No n.º 19, lemma 3.º, dissemos que para dividir potencias da mesma base se subtrahiam os expoentes. Por conseguinte, quando tivermos que dividir, por exemplo, a^m por a^m, será, em virtude d'aquella regra, $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$; e como tambem, pela definição de divisão, $\frac{a^m}{a^m} = 1$, será $a^0 = 1$.

Pela noção que temos de expoentes, uma quantidade levantada a zero não tem significação alguma; mas, pelo que fica dito, *convencionou-se* considerál-a como symbolo que represente a unidade. A vantagem principal que resulta da admissão d'este symbolo é poder-se considerar n'uma formula, que resolve ou é traducção fiel de qualquer problema, uma quantia dade que desappareceria pela simplificação ou effectuado das operações. Por exemplo, supponhamos que a expressão $\frac{25\,a^4\,b^2\,c^3}{5\,a^3\,b^2\,c} = 5\,a\,c^2$, é a formula que traduz o enunciado de certo problema, em cujo resultado nós queremos mostrar a relação existente entre as quantidados a, b e c. Pela expressão $5\,a\,c^2$, não temos de considerar senão as duas quantidades a e c; mas podemos ligál-as com a quantidade b, introduzindo-a na formula em virtude da convenção estabelecida. Portanto, poderemos escrever, como formula que ligue as quantidades dadas, a seguinte:

$$\frac{25\,a^4\,b^2\,c^3}{5\,a^3\,b^2\,c} = 5\,a\,b^0\,c^2$$

Quando dividirmos a quantidade a^m por a^{m+n}, applicando tambem a esta divisão o principio do lemma 3.º do n.º 19, ter-se-ha

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{m-m-n} = a^{-n}$$

mas como tambem é, pelo mesmo motivo,

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^n}$$

concluiremos que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Temos egualmente de estabelecer outra convenção para este caso, visto como o que atraz fica dito ácêrca de expoentes não satisfaz para explicar o que seja um expoente negativo, que em absoluto se não comprehende. Estabeleceremos, pois, em considerar, *convencionalmente,* nas quantidades negativas a faculdade de poderem servir de expoentes, intendendo-se que *uma potencia de expoente negativo é egual á unidade dividida pela mesma potencia com o expoente positivo.*

Resumindo, temos, pois, que

$$a^0 = 1,\ \text{e}\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Das Equações

36. Duas expressões separadas pelo signal =, constituem em geral uma *egualdade,* que se desdobra em *identidade* e *equação.* A primeira, é a egualdade entre duas expressões nu-

mericas, como $4 \times 5 + 6 = 26$; ou a egualdade entre duas expressões litteraes, sempre verdadeira qualquer que fôr o valor attribuido ás lettras que a formam. Exemplo: $(x + a) \times (x - a) = x^2 - a^2$. Esta egualdade é sempre verdadeira quaesquer que forem os valores de x e de a. *Equação*, é a egualdade entre duas expressões que involvam quantidades desconhecidas, só satisfeitas para valores particulares d'essas quantidades. Exemplo $14\,x = 2$. As quantidades desconhecidas que entram n'uma operação chamam-se *incognitas*, e costumam representar-se pelas ultimas lettras do alphabeto latino, t, u, v, x, y, w, e z.

Grau de uma equação, cujos dois membros sejam quantidades racionaes e inteiras relativamente ás incognitas, é a maior somma dos expoentes das incognitas no mesmo termo. A equação $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ é do segundo grau, por ser 2 o maior dos expoentes da incognita. Equação completa é aquella em que figuram todas as potencias da incognita desde a primeira até á ultima ou grau de equação. Assim a equação $x^2 + p\,x + q = 0$ é uma equação completa.

Chama-se equação *numerica* a que contêm, juntamente com as incognitas, expressões numericas. Exemplo:

$$5\,x^2 + 3\,x + \frac{4}{3} = 5$$

Dir-se-ha litteral a equação quando n'ella houver, alêm das incognitas, expressões litteraes. Exemplo: $4\,a\,x + 5\,y = c$.

Equações *equivalentes* são as que se satisfazem com os mesmos valores das incognitas. Por exemplo:

$$5\,x + \frac{3}{4}\,x = 7 + \frac{2}{3} \text{ e } 69\,x = 92$$

são duas equações do primeiro grau equivalentes, que têem a mesma solução $1\frac{11}{23}$

37. *Equações do primeiro grau a uma incognita. Resolução.* Para resolver equações de qualquer grau são precisos os dois seguintes principios:

1.º *Uma equação não se altera quando se junta ou subtrae aos seus dois membros a mesma quantidade.*

2.º *Uma equação não se altera quando ambos os seus membros se multiplicam ou dividem pela mesma quantidade, comtanto que esta não seja funcção da incognita.*

No segundo principio fizemos a restricção de não se dever contar a incognita na quantidade que é factor ou divisor dos dois membros da equação, e esta clausula é necessaria, porque, se assim não fosse, o numero de soluções poderia ser alterado.

Com effeito, seja a equação

$F(x) = 0$ .... (A)

Multiplicando ambos os membros pela quantidade $f(x)$, temos

$F(x) \times f(x) = 0$ .... (B)

Para que um producto de dois factores seja zero é necessario e sufficiente que algum d'elles ou ambos, o sejam. Se forem simultaneamente

$$F(x) = 0 \text{ e } f(x) = 0$$

é manifesto que os valores de x, que tornam nullo $F(x)$, podem não ser eguaes aos que anullam $f(x)$, o que implica uma alteração das soluções da equação (A), não sendo portanto a equação (B) equivalente á proposta.

Postos estes principios, passemos á resolução da equação do primeiro grau.

Resolver uma equação vem a ser *separar n'um só membro e n'um só termo com o coefficiente unidade, a incognita.* Para isto é preciso transpor de um para outro membro os termos conhecidos, o que se faz tomando por base os dois principios supra-citados. Exemplifiquemos.

Tomemos para resolver a equação numerica

$$5x + 2 = 3x + 4$$

Pelo primeiro principio, poderemos subtrahir a ambos os membros as quantidades 2 e $3x$, o que dará

$$5x - 3x = 4 - 2$$

e effectuando

$$2x = 2$$

Dividindo, em virtude do 2.º principio, ambos os membros por 2, virá

$$x = \frac{2}{2} = 1, \quad \text{isto é, } x = 1.$$

2.º Exemplo. $40x - 45 = 660 + 12x$

Transpondo para o primeiro membro os termos que tenham a incognita, e para o segundo os conhecidos, o que equivale a subtrahir a ambos os termos $12x$, e a juntar 45, teremos

$$40x - 12x = 660 + 45$$
$$28x = 705$$

e, dividindo ambos os membros por 28,

$$x = \frac{705}{28}$$

$$x = 25\,\frac{5}{28}$$

Escholio. Quando os coefficientes forem fraccionarios, a primeira coisa a fazer é *livrar de denominadores* a equação. Para isto procurar-se-ha o menor multiplo commum dos denominadores, dividir-se-ha por cada um o menor multiplo commum achado, multiplicando-se depois o quociente obtido pelo numerador do quebrado, não se escrevendo o denominador commum, porque se suppõe que se multiplicam todos os termos por elle.

3.º Exemplo. Seja a equação

$$\frac{4}{25}x - \frac{2}{14}x + 7 = \frac{2}{15}x + \frac{3}{4}$$

O menor multiplo commum dos denominadores é

$$2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

visto como, decompondo os denominadores em factores primos, se obtêm $25 = 5^2$, $14 = 2 \times 7$, $15 = 3 \times 5$, $4 = 2^2$. Portanto a equação dada transforma-se em

$$2^2 \times 3 \times 7 \times 4\,x - 2^2 \times 3 \times 5^2 x + 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$$
$$= 2^3 \times 5 \times 7\,x + 3^2 + 5^2 \times 7$$

ou

$$336\,x - 300\,x + 14700 = 280\,x + 1575$$
$$336\,x - 300\,x - 280\,x = 1575 - 14700$$
$$336\,x - 580\,x = 1575 - 14700$$
$$-244\,x = -13125$$

dividindo ambos os membros por -244, obtêm-se

$$x = \frac{-13125}{-244} = 53\,\frac{193}{244}$$

isto é,

$$x = 53\,\frac{193}{244}$$

4.º Exemplo. Seja a equação

$$\frac{5\,x}{12} - \frac{4\,x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13\,x}{6}.$$

O menor multiplo commum d'estes denominadores é 24; logo, practicando como acima se ensinou, virá

$$10\,x - 32\,x - 312 = 21 - 52x$$
$$10\,x - 32\,x + 52x = 21 + 312$$
$$30\,x = 333$$

$$x = \frac{333}{30} = \frac{111}{10}$$

e finalmente

$$x = 11{,}1$$

5.º Exemplo. Seja a equação litteral

$$\frac{a\,x}{b} - \frac{2\,c^2\,x}{a\,b} + 4\,a = \frac{4\,b\,c^2\,x}{a^3} - \frac{5\,a^3}{b^2} + \frac{2\,c^2}{a} - 3\,b$$

O menor multiplo commum dos denominadores é evidentemente $a^3\,b^2$. Applicando pois a regra á equação dada, vem

$$a^4\,b\,x - 2\,a^2\,b\,c^2\,x + 4\,a^4\,b^2 = 4\,b^3\,c^2\,x - 5\,a^6 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 3\,a^3\,b^3$$

ou

$$a^4\,b\,x - 2\,a^2\,b\,c^2\,x - 4\,b^3\,c^2\,x = -4\,a^4\,b^2 - 5\,a^6 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 3\,a^3\,b^3$$

$$x\,(a^4\,b - 2\,a^2\,b\,c^2 - 4\,b^3\,c^2) = -4\,a^4\,b^2 - 5\,a^6 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 3\,a^3\,b^3$$

$$x = \frac{-4\,a^4\,b^2 - 5\,a^6 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 3\,a^3\,b^3}{a^4\,b - 2\,a^2\,b\,c^2 - 4\,b^3\,c^2}$$

6.º Exemplo. Resolver a seguinte equação

$$\frac{(a+b)\,(x-b)}{a-b} - 3\,a = \frac{4\,a\,b - b^2}{a+b} - 2\,x + \frac{a^2 - b\,x}{b}$$

livrando de denominadores, ter-se-ha

$$b\,(a+b)^2\,(x-b) - 3\,a\,b\,(a^2 - b^2) = b\,(a-b)\,(4\,a\,b - b^2) - 2\,b\,(a^2 - b^2)\,x + (a^2 - b^2)\,(a^2 - b\,x)$$

effectuando as multiplicações indicadas

$$a^2\,b\,x + 2\,a\,b^2\,x + b^3\,x - a^2\,b^2 - 2\,a\,b^3 - b^4 - 3\,a^3\,b + 3\,a\,b^3 = 4\,a^2\,b^2 - a\,b^3 - 4\,a\,b^3 + b^4 - 2\,a^2\,b\,x + 2\,b^3\,x + a^4 - a^2\,b^2 - a^2\,b\,x + b^3\,x;$$

transpondo e reduzindo

$$4\,a^2\,b\,x + 2\,a\,b^2\,x - 2\,b^3\,x = 4\,a^2\,b^2 - 6\,a\,b^3 + 2\,b^4 + 3\,a^3\,b + a^4$$

tirando x como factor commum

$$b\,(4\,a^2 + 2\,a\,b - 2\,b^2)\,x = 4\,a^2\,b^2 - 6\,a^3\,b + 2\,b^4 + 3\,a^3\,b + a^4$$

e finalmente

$$x = \frac{4\,a^2\,b^2 - 6\,a\,b^3 + 2\,b^4 + 3\,a^3\,b + a^4}{b\,(4\,a^2 + 2\,a\,b - 2\,b^2)}$$

expressão que se não pode reduzir a polynomio inteiro.

De quanto acima se expoz, poderemos assentar a seguinte regra:

Para resolver uma equação do primeiro grau, deve-se: 1.º *começar por livrar de denominadores, se os houver, a equação,* *e effectuar nos seus dois membros todas as operações algebricas que se apresentarem, obtendo-se assim uma equação cujos dois membros são inteiros; 2.º transpôr para um membro* (usualmente para o primeiro) *todos os termos que contenham a incognita, e para o outro, os termos conhecidos; 3.º reduzir a um só todos os termos affectos de* x, *se a equação fôr numerica; e se fôr algebrica, formar com todos estes termos um producto unico composto de dois factores, sendo um d'elles* x, *e o outro a reunião das quantidades que multiplicam* x, *reunidas com os respectivos signaes; 4.º dividir finalmente, os dois membros da equação pelo coefficiente da incognita* (monomio ou polynomio), *e effectuar a divisão, se possivel fôr.*

38. *Equações do primeiro grau a mais de uma incognita. Systemas.* Chama-se *systema de equações* a um grupo de equações que são satisfeitas pelos mesmos valores das incognitas. Estas equações chamam-se *simultaneas*. Os valores que, substituidos pelas incognitas, transformam as equações em identidades, dizem-se *soluções* do systema. Systemas *equivalentes* são os que têem as mesmas soluções.

Quando haja que resolver duas equações do 1.º grau que contenham duas incognitas, o meio empregado consiste em *eliminar* uma d'ellas, isto é, em deduzir das duas equações dadas outra que não contenha essa incognita, e d'onde se possa tirar o valor da incognita restante. Varios methodos, que passamos a expor, se empregam para effectuar essa eliminação.

39. *Primeiro methodo: eliminação por comparação.* Sejam as duas equações

$$3y - 7x = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$2y + 5x = 22 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Consideremos x e y como dois numeros que, postos em vez d'estas mesmas lettras, satisfazem as equações dadas. Raciocinaremos então sobre ellas como sobre identidades. Das equações (1) e (2) tira-se:

$$y = \frac{7x + 4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$y = \frac{22 - 5x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

e, porque estes valores devem ser eguaes, tem-se

$$\frac{7x + 4}{3} = \frac{22 - 5x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Alcançámos, pois, uma equação do primeiro grau a uma incognita, que já sabemos resolver. Applicando á equação (5) os methodos e regras supra-ensinadas, ter-se-ha successivamente

$$\frac{7x+4}{3}=\frac{22-5x}{2}$$
$$14x+8=66-15x$$
$$14x+15x=66-8$$
$$29x=58$$
$$x=\frac{58}{29}$$
$$x=2$$

Substituindo este valor de x n'uma das duas expressões de y acima escriptas, acharemos o valor d'esta incognita. E' aliás evidente que fazendo esta substituição n'uma ou n'outra, se deve obter o mesmo resultado, porque o valor de x, tendo sido deduzido da equação (5), deve tornar em identidade os dois membros d'esta, que apenas são as duas expressões de y de que se trata. Substituindo, portanto, na primeira, vem

$$y=\frac{7\times 2+4}{3}=\frac{18}{3}=6$$

São, pois, as soluções do systema

$$\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$$

Pelo modo como estes valores se acharam tem-se a certeza de que convêm ás duas equações dadas. Effectivamente, elles convêm ás equações (3) e (4); e como estas, livrando de denominadores e transpondo para o primeiro membro os termos em x, se reduzem ás equações propostas (1) e (2), segue-se que os valores de x e de y devem tambem satisfazer a estas equações.

Esta ultima observação era necessaria porque, para chegar aos valores $x=2$, $y=6$, suppoz-se que havia valores de x e de y que verificavam as duas equações dadas, e nada demonstrava que esta hypothese era verdadeira. Restava ainda pois examinar se os valores de x e de y satisfaziam realmente ás duas equações.

Com este fim poderiam ter-se substituido os valores de x e y immediatamente nas equações, para ver se estas se tornavam em identidades. E' isto, com effeito, o que se dá; porque por esta substituição, a primeira torna-se em

$$3\times 6-7\times 2=4, \text{ ou } 18-14=4, \text{ ou } 4=4$$

e a segunda:

$(2 \times 6) + (5 \times 2) = 22$, ou $12 + 10 = 22$, ou $22 = 22$

40. *Segundo methodo: eliminação por substituição.* Este methodo consiste em tirar o valor de uma incognita de uma das equações, e substituil-o na outra. Seja o systema:

$$4x - 5y = 7 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$3x + 2y = 9 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

tirando o valor de x, por exemplo, da primeira equação, e substituindo-o na segunda, vem $x = \frac{7 + 5y}{4}$, e $3 \times \frac{7+5y}{4} + 2y = 9$. Resolvendo esta equação pelos methodos sabidos, vem $y = \frac{15}{23}$, e substituindo este valor em (2), virá, resolvendo em ordem a x, $x = \frac{177}{69}$, sendo, por conseguinte, as soluções do systema $x = \frac{177}{69}$ e $y = \frac{15}{23}$

41. *Terceiro methodo: eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente.* Para empregar este methodo de eliminação é mister reduzir primeiramente as equações á fórma $ax + by = c$. Vê-se então que, se uma das incognitas em qualquer das equações tivesse o mesmo coefficiente, se poderia eliminar esta incognita subtrahindo membro a membro uma das equações da outra, ou juntando-os quando os coefficientes da mesma incognita fossem signaes contrarios. Obter-se-hia d'este modo simplesmente uma equação a uma incognita (a que se não eliminou), que já sabemos resolver. E' evidente que se uma incognita em duas equações de qualquer systema não tiver o mesmo coefficiente, se poderá levar a tel-o, multiplicando os dois membros de cada equação pelo coefficiente que esta incognita tem na outra equação.

Seja o systema

$$3x + 2y = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$5x + 3y = 9 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Se quizermos obter primeiramente o valor de x, eliminaremos y. Para isto multiplicaremos a primeira equação por 3 (coefficiente de y na 2.ª), e a 2.ª por 2 (coefficiente de y na 1.ª), obtendo

$$9x + 6y = 12 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$10x + 6y = 27 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Subtrahindo (2) de (3), temos

$$x = 15$$

que substituido em (1) dá $3 \times 15 + 2y = 4$,

ou $2y = 4 - 45 = -41, y = -\frac{41}{2}$.

42. *Resolução de qualquer numero de equações a qualquer numero de incognitas.* Sejam as tres equações

$$4x - 3y + 2z = 40 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$5x + 9y - 7z = 47 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$9x + 8y - 3z = 97 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Por qualquer dos methodos expostos poderemos eliminar a incognita z entre a primeira equação e cada uma das outras. Empregando-se a reducção, tem-se:

$$38x - 3y = 374 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$
$$30x + 7y = 314 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Eliminando y entre estas duas equações virá, empregando a reducção

$$356x = 3560, \text{ d'onde } x = 10$$

Substituindo este valor em (4), ter-se-ha

$$380 - 3y = 374, \text{ d'onde } y = 2$$

E, pondo finalmente os valores de x e y em (1), tem-se

$$40 - 6 + 2z = 40, \text{ d'onde } z = 3$$

São, pois, as soluções do systema

$$x = 10, \ y = 2, \ z = 3$$

E' evidente que estes valores são os unicos que possam satisfazer ás tres equações propostas. Para nos certificarmos, é preciso observar que, pelo modo como estes valores se obtiveram, elles devem satisfazer ás equações (1), (4), (5). E, sendo a equação (2) consequencia das equações (1) e (4) e a equação (3) consequencia de (1) e (5), os valores de x, y, z que verificam as equações (1), (4), (5), não podem deixar de satisfazer ás equações (1), (2) e (3).

43. Do exposto podemos assentar a seguinte regra:

Para resolver muitas equações do 1.º grau em numero egual ao das incognitas, elimine-se uma incognita entre uma d'estas equações e cada uma das outras, obtendo-se assim novas equações que conterão uma incognita menos, que serão em numero egual ao das incognitas restantes, e que serão tambem do 1.º grau. Operar-se-ha sobre estas equações como sobre as primeiras, isto é, eliminar-se-ha uma incognita entre uma das novas equações e cada uma das demais. Continuando d'este modo sempre, obter-se-ha uma equação do 1.º grau a uma só incognita.

D'esta tirar-se-ha o valor da incognita que ficou, valor que, substituido nas equações precedentes, permittirá obter os valores das outras incognitas.

Escholio. Quando houver factores communs a todos os termos de uma equação, é conveniente supprimil-os para se operarem calculos mais simples. Exemplo:

$$\begin{aligned} 10x - 20y + 30z &= 60 \\ 8x + 12y - 16z &= 80 \\ 27x - 18y + 45z &= 234 \end{aligned}$$

Este systema póde tornar-se no seguinte, dividindo a primeira equação por 10, a segunda por 4, e a terceira por 9

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 3y - 4z &= 20 \\ 3x - 2y + 5z &= 26 \end{aligned}$$

Resolvendo pela regra exposta, tem-se os seguintes valores ou soluções do systema: $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$.

44. Quando todas as incognitas não intrarem em cada uma das equações, o processo simplifica-se por haver eliminações a menos, seguindo-se a regra geral. Tomem-se por exemplo as quatro equações

$$\begin{aligned} 7u - 13z &= 87 \\ 3u + 14x &= 57 \\ 10y - 3x &= 11 \\ 2x - 11z &= 50 \end{aligned}$$

Eliminando-se u entre as duas primeiras, a equação resultante só conterá x e z; e portanto, juntando-a á ultima, teremos duas equações que darão a conhecer estas duas incognitas. As equações são:

$$\begin{aligned} 98x + 39z &= 138 \\ 2x - 11z &= 50 \end{aligned}$$

Eliminando x pelo methodo de reducção, obtem-se $z = -4$, que, substituido em $2x - 11z = 50$, dá $x = 3$. Substituindo estes dois valores na 2.ª e 3.ª das equações dadas, acharemos $u = 5$, $y = 2$. São, pois, as soluções do systema

$$u = 5,\ y = 2,\ x = 3,\ z = -4$$

45. Quando o numero de equações fôr superior ao das incognitas, separaremos tantas equações quantas incognitas houver, equações que darão, salvo excepção, um systema unico de valores para essas incognitas, os quaes, depois de achados substituiremos nas equações restantes para examinar se elles satisfazem tambem a estas. Ora, salvo o caso d'estas equa-

ções terem sido escolhidas de fórma particular, é natural que não haja valores que simultaneamente satisfaçam a todas as equações do systema.

Se o numero de incognitas, pelo contrario, fôr superior ao das equações; se forem, por exemplo, as incognitas cinco, e as equações tres, poderemos dar a duas d'ellas valores arbitrarios, e calcular pelos methodos sabidos os valores das restantes. Mudando os valores das duas primeiras incognitas, teremos outro systema de valores, e assim indefinidamente. Será todavia, preferivel não attribuir valores particulares a nenhuma das incognitas, e resolver as equações como se duas d'ellas (na hypothese sujeita) forem quantidades dadas. D'este modo resultarão formulas para as tres incognitas, em que in-trarão as outras duas, e que farão conhecer os valores particulares das segundas.

46. *Equações de condição.* Seja o systema

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a\\ 2x-y&=b\\ 2y-x&=2+a\\ 2y-x&=3b+1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

Resolvendo as duas primeiras, acha-se

$$x=\frac{a+b}{3},\ y=\frac{2a-b}{3}$$

e, substituindo estes valores nas duas ultimas, virá

$$\left.\begin{aligned} 3\times\frac{2a-b}{3}-\frac{a+b}{3}&=2+a\\ 2\times\frac{2a-b}{3}-\frac{a+b}{3}&=3b+1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (B)$$

Se os valores de a e b satisfizerem ás equações (B), os de x e y satisfarão ás equações (B). E' este o motivo por que as equações (B) se chamam *equações de condição,* visto exprimirem as condições a que devem satisfazer os coefficientes a e b para ser possivel o systema (B).

47. Chama-se *equação impossivel* a que se não póde satisfazer por qualquer valor da incognita.

Um systema é *impossivel,* ou as equações que o formam são *incompativeis* ou *contradictorias,* quando todas simultaneamente se não podem satisfazer pelos mesmos valores das incognitas.

Em geral a impossibilidade de uma equação manifesta-se pela formula $m=0$.

Quando qualquer valor de uma incognita satisfaz a uma equação, esta diz-se *indeterminada*. A indeterminação manifesta-se pela formula $0 = 0$, ou $x = \frac{0}{0}$

Um systema é *indeterminado* quando tem numero infinito de soluções.

48. *Problemas do 1.º grau. Resolver um problema* é achar os valores que devem ter as quantidades desconhecidas que n'elle entram, quando as conhecidas as determinam.

A resolução de um problema consta de tres partes: 1.ª a sua traducção por uma equação; 2.ª a resolução d'esta; 3.ª a sua discussão.

Pôr um problema em equação, é representar por uma ou muitas equações as relações dadas entre as incognitas e as quantidades conhecidas. E' a parte mais difficil, em geral, e que demanda muitas vezes grande concentração de espirito, e sempre uma prática mais ou menos longa e bem dirigida. Para o conseguir, representam-se as incognitas por lettras, e as relações entre ellas e as quantidades conhecidas pelos signaes que a algebra consagra para tal fim. Daremos alguns exemplos para esclarecer o que dizemos.

1.º Problema. *Um pae tem 40 annos em 1841, e seu filho tem 15. Pergunta-se quando será a edade do pae dupla da do filho?*

Para resolver este problema, raciocinaremos que deve decorrer certo numero de annos para que a edade do pae seja o dobro da do filho; e, suppondo o problema resolvido, chamaremos a esse numero de annos x. Então é manifesto que quando se der este facto, a edade do pae será, não 40, mas $40 + x$; e a do filho, $15 + x$; e, como em virtude do enunciado a primeira edade é dupla da segunda, segue-se que teremos:

$$40 + x = 2\,(15 + x)$$

que resolvida dá

$$40 + x = 30 + 2\,x$$
$$40 - 30 = 2\,x - x$$
$$10 = x$$

Será portanto dez annos depois de 1841, isto é em 1851, que a edade do pae dobrará a do filho. Effectivamente, em 1851 o filho terá 25 annos e o pae 50.

2.º Problema. *Decompôr um numero em duas partes taes que a sua somma seja* A *e a sua differença* B. Sejam x e y as duas partes que pretendemos calcular. Pelo enunciado, tem-se

$$x+y=a$$
$$x-y=b$$

Resolvendo este systema pela regra sabida, obter-se-ha

$$x=\frac{a+b}{2}$$
$$y=\frac{a-b}{2}$$

3.º Problema. *Uma lebre perseguida por um galgo tem, em relação a este, uma deanteira de 60 passos. A lebre dá 9 passos emquanto o galgo dá 6; mas 3 passos do galgo valem por 7 da lebre. Quantos passos dará o galgo para alcançar a lebre?*

Representemos o caminho (seguido pelos dois animaes) por uma linha recta $X\,Y$, indicando G o ponto em que se acha o galgo

$$X \underline{\qquad G.\ 60\ \text{passos.}\quad L.\ x\ \text{passos.}\quad E. \qquad} Y$$

quando a lebre está em L, e E o ponto em que o primeiro alcança a segunda. Pelo problema sabe-se que a velocidade do galgo é de 6 passos, e a da lebre de 9; e, porque 7 passos da lebre correspondem a 3 do galgo, teremos que, representando por x o numero de passos que a lebre tem ainda de dar para ser alcançada pelo galgo, este numero x se reduzirá a passos de galgo pela seguinte proporção

$$7:3::x:\frac{3x}{7} \text{ passos de galgo}$$

O caminho, pois, que o galgo tem de percorrer para chegar ao ponto E, é de $\frac{3}{7}(60+x)$ passos, durante o tempo em que a lebre tem de dar $\frac{3x}{7}$

Sabendo pela physica que o espaço dividido pela velocidade dá o tempo, e porque este é egual tanto para a lebre como para o galgo attingirem E, teremos a seguinte equação, reduzindo a velocidade da lebre a passos do galgo

$$\frac{3\,(60+x)}{7\times 6}=\frac{3\,x}{27},$$ que resolvida dá

$$\frac{60+x}{14}=\frac{x}{9}$$
$$540+9\,x=14\,x$$
$$540=5\,x$$
$$x=\frac{540}{5}$$
$$x=108$$

Terá por conseguinte o galgo que dar $46\frac{2}{7}$ passos para alcançar a lebre.

4.° Problema. *Dividir 32 em duas partes taes que a somma dos quocientes, resultantes da divisão da primeira parte por 6 e da segunda por 5, seja egual a 6.*

Representemos por x e y as duas partes. Pelo enunciado do problema, teremos as duas seguintes equações

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{6}+\frac{y}{5}&=6\\ x+y&=32\end{aligned}\right\}$$

Resolvendo este systema pelo methodo de reducção, vem

$$\left.\begin{aligned}5\,x+6\,y&=180\\ x+\ \ y&=\ \ 32\end{aligned}\right\}$$

elimiuando y
$$\left.\begin{aligned}5\,x+6\,y&=180\\ 6\,x+6\,y&=192\end{aligned}\right\}$$
$$x=\ 12$$

Sendo $x=12$ uma das partes, a outra será $32-12=20$.

Este problema poder-se-hia ter resolvido por uma só equação, d'esta fórma. Sendo x uma das partes, a outra será evidentemente egual a $32-x$, e portanto pelas condições do enunciado, tem-se

$$\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$$

que resolvida, dá

$$5\,x+192-6\,x=180$$
$$-x=-12$$
$$x=12$$

e por conseguinte, será uma parte egual a 12, e a outra egual a 20.

Das desegualdades

49. Quando duas quantidades ou expressões estão separadas pelos signaes $>$ e $<$, formam uma desegualdade.

Antes de estudarmos algumas propriedades relativas ás desegualdades, apresentaremos o seguinte

Lemma. Quando uma quantidade a *fôr maior do que* b, *a sua differença* b — a *será positiva, isto é, maior do que zero.*

Examinaremos os casos em que a e b tenham o mesmo signal, e signaes contrarios. Se ambas aquellas quantidades forem positivas, é evidente que, tirando á quantidade a a parte b, ficará um resto positivo e portanto maior do que zero. Quando a e b forem negativos, ter-se-ha, representando-os por $-m$, e por $-n$

$$a - b = (-m) - (-n) = n - m$$

Quer isto dizer que, sendo a $> b$, ou $-m > -n$, o valor numerico ou absoluto de n é superior ao de m, e que por conseguinte $n - m$ é uma quantidade positiva ou maior do que zero, o que significa que $a - b$ tambem o é. Se por acaso a fôr positivo e b negativo, isto é, se b tiver o valor $-m$, ter-se-ha

$$a - b = a - (-m) = a + m$$

e porque $a + m$ é quantidade essencialmente positiva, será $a - b > 0$. Se fosse a negativo e b positivo, a desegualdade $a - b > 0$ era absurda, pela noção já dada de quantidades negativas.

50. Para se resolverem desegualdades de qualquer grau, assentaremos os seguintes principios fundamentaes:

1.º *O sentido de uma desegualdade não se altera quando se junta ou subtrae a mesma quantidade a ambos os seus membros.*

Isto é evidente, porque tendo, por exemplo, a desegualdade $a > b$, ou $a - b > 0$, juntando a mesma quantidade m, e subtrahindo-a ao primeiro membro, teremos

$$a - b > 0$$
$$a - b + m - m > 0$$
$$(a + m) - (b + m) > 0$$
$$a + m > b + m$$

e tambem $\quad (a - m) - (b - m) > 0$

ou $\quad a - m > b - m$

2.º *Não se altera o sentido de uma desegualdade quando seus membros se multiplicarem ou dividirem pela mesma quantidade positiva.* Porque, sendo $a > b$, será

$$a - b > 0$$

$(a - b)\, c > 0$, ou $(a - b) : c > 0$, sendo c positivo, e

$$a\,c - b\,c > 0,\ \text{ou}\ \frac{a}{c} - \frac{b}{c} > 0$$

d'onde $$a\,c > b\,c,\ \text{ou}\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Com o auxilio d'estes principios poderemos effectuar a transposição dos termos de um membro de uma desegualdade para outro, trocando-lhes os signaes, á similhança do que se pratica com as equações.

51. Sommaremos desegualdades do mesmo sentido, membro a membro. Sejam para sommar $m > n$, $p > q$, e $r > s$, teremos

$$m - n > 0,\ p - q > 0,\ r - s > 0$$

e, como todas estas quantidades são positivas, sel-o-ha tambem a sua somma, portanto

$$m - n + p - q + r - s > 0$$
$$(m + p + r) - (n + q + s) > 0$$
$$m + p + r > n + q + s$$

Escholio. Desegualdades de sentidos differentes não obedecem a regra alguma para se sommarem.

52. De uma desegualdade tirando outra do mesmo sentido membro a membro, *obter-se-ha uma desegualdade do sentido da primeira.* Isto é, se tivermos $a > b$ e $m < n$, tem-se $a - m > b - n$.

A razão é obvia, sendo $a > b$, e $m < n$, será

$$a > b$$
$$n > m$$

Sommando-as (n.º 51)

$$a + n > b + m$$

ou (n.º 50)

$$a - m > b - n$$

Escholio. Desegualdades do mesmo sentido, não têem regra para se subtrahirem.

53. Multiplicam-se desegualdades do mesmo sentido entre quantidades positivas, *multiplicando-as membro a membro.*

Tendo, por exemplo, que multiplicar entre si as desegualdades $m > n$, e $p > q$, o resultado será $m\,p > n\,q$. Effectivamente, sendo $m > n$, e $p > q$, e m, n, p, q quantidades positivas, será

$$m\,p > n\,p \ \text{e}\ n\,p > n\,q$$

e portanto $m\,p > n\,q$, porque se fôr $m\,p > n\,q$, e $n\,p > n\,q$, é claro que será $m\,p > n\,q$.

Escholio I. Desegualdades de sentidos differentes entre quantidades do mesmo signal, ou desegualdades do mesmo sentido entre quantidades de signaes contrarios, não obedecem á regra acima dada.

Escholio II. Quando os termos de uma desegualdade se multiplicarem ou dividirem pelo mesmo numero negativo, a desegualdade mudará de sentido. Isto é, sendo $a > b$, se multiplicarmos ambos os membros da desegualdade por m, sendo m uma quantidade negativa, ter-se-ha $am < bm$. Com effeito, se fôr $a > b$, será $a - b > 0$, e portanto positivo. Multiplicando ou dividindo $a - b$ por uma quantidade negativa, o producto $(a - b) \times m$, e o quociente $\frac{a-b}{m}$, serão negativos, e por conseguinte menores do que zero. Logo $(a - b) \times m < 0$, ou $am - bm < 0$, o que dará $am < bm$. Para o caso da divisão, será tambem $\frac{a-b}{m} < 0$, ou $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} < 0$; o que produz $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

Escholio III. Quando todos os termos de desegualdades que devam multiplicar-se forem negativos, ainda se multiplicarão segundo a regra enunciada; porque podem reduzir-se ao caso considerado, multiplicando por -1 todos os seus membros, e invertendo (Escholio II) os sentidos das desegualdades.

54. Dividem-se ordenadamente duas desegualdades de sentidos differentes, *dividindo-as membro a membro, e collocando o signal a favor ou no sentido da primeira, na hypothese de todos os termos serem positivos.*

Isto é, sendo $m > n$ e $p < q$, será

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$$

Effectivamente, sendo $m > n$, e $p < q$, será $m > n$ e $q > p$. Multiplicando estas desegualdades segundo a regra, será

$$mq > np, \text{ ou } \frac{m}{q} > \frac{n}{p}$$

Escholio I. Não ha regra para se dividirem ordenadamente desegualdades do mesmo sentido.

Escholio II. Se os termos m, n, p, q forem todos negativos, multiplicando-os a todos por -1, poder-lhes-hemos applicar a regra supra-dada.

55. Como corollario do principio exposto nos n.os 53 e 54, e seus escholios, estabeleceremos o seguinte:

1.º *Podem elevar-se á mesma potencia os dois membros de uma desegualdade, se elles forem positivos.*

2.º *Se os dois membros de uma desegualdade forem negativos, poderemos eleval-os á mesma potencia, quando o expoente d'esta fôr impar.*

3.º *Se os dois membros de uma desegualdade forem negativos poderemos eleval-os a uma potencia indicada por um expoente par, trocando o sentido á desegualdade.*

4.º *Se os dois membros de uma desegualdade são de signaes contrarios, poderemos eleval-os á potencia indicada por expoente impar, conservando o sentido da desegualdade.*

5.º *Quando os dois membros de uma desegualdade forem de signaes contrarios, e quizermos eleval-os a uma potencia de expoente par, não poderemos pre-estabelecer qual será o sentido da desegualdade resultante.*

6.º *Póde extrahir-se a raiz de qualquer grau aos dois membros de uma desegualdade, se ambos forem positivos ou ambos negativos.*

56. *Resolução de desegualdades.* Resolver uma desegualdade em relação a uma lettra, é isolar esta n'um só membro da desegualdade e n'um só termo com o coefficiente unidade. D'este modo, intender-se-ha que resolver uma desegualdade em x em ordem a esta variavel, é determinar-lhe o limite do valor, limite que importa a verificação da desegualdade.

Daremos alguns exemplos.

1.º *Achar o valor de* x *que satisfaz simultaneamente as duas desegualdades seguintes:*

$$x+\frac{1}{2}>\frac{1}{3}x+5$$
$$\frac{x}{5}+1>\frac{3}{4}x-6$$

Desembaraçando de denominadores, teremos

$$6x+3>2x+30$$
$$4x+20>15x-120$$

ou, effectuando as reducções, $4x>27$ ou $x>\frac{27}{4}$

e da segunda

$$x<\frac{140}{11}$$

Por conseguinte, x está comprehendido entre 27 e $\frac{140}{11}$. Se x fôr inteiro, só poderá caber-lhe algum dos numeros 7, 8, 9, 10, 11, 12, porque são sómente estes os valores inteiros comprehendidos entre os limites $\frac{27}{4}$ e $\frac{140}{11}$.

2.º *Quaes são os valores de* x *e* y *que satisfazem as seguintes desegualdades:*

$$\frac{y-3}{4}+\frac{y-2}{5}>\frac{x}{5}-\frac{y}{2}$$

$$\frac{3y-x}{2}+1>\frac{x-2}{3}$$

$$x-\frac{x}{4}<6-2y$$

Resolvendo em ordem a x, teremos

$$x>-14y+23;\ x<\frac{9}{5}y+2;\ x>8y-12\ \ldots.\ (A)$$

Da primeira e segunda deduz-se

$$\frac{9}{5}y+2>-14y+23\ \ldots\ldots\ (1)$$

e da segunda e terceira

$$\frac{9}{5}y+2>8y-12\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

portanto, resolvendo as desegualdades (1) e (2) que só contêem y, vem

$$y>\frac{105}{79} \qquad y<\frac{70}{31}$$

Poderemos attribuir a y valores comprehendidos entre estes dois limites. Substituindo um d'estes valores em todas as desegualdades (A) obter-se-hão limites para x correspondentes a esse valor de y. Para outros valores de y, resultarão novos limites para x.

3.º *Provar que a media arithmetica de duas quantidades é superior á sua media geometrica.* Isto é demonstrar que $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, sendo a e b as duas quantidades, ambas positivas. Reduz-se a questão a demonstrar que

$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0$. Reduzindo ao mesmo denominador esta expressão vem

$$a+b-2\sqrt{ab}\text{ é}>0$$

que se póde escrever

$$\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2>0$$

notando que o primeiro membro é egual a $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Ora, como um quadrado é sempre uma quantidade positiva e portanto maior do que zero, segue-se

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ ou $a+b-2\sqrt{ab}>0$, e portanto

$$a+b>2\sqrt{ab}$$

Das equações do segundo grau

57. Antes de passarmos á resolução das equações do segundo grau, demonstraremos o principio seguinte:

A raiz quadrada algebrica de uma quantidade tem unicamente dois valores, eguaes e de signaes contrarios.

Porque *raiz quadrada* de uma quantidade é outra que elevada ao quadrado reproduz a primeira, segue-se que, se tivermos

$$x^2=A$$

x, terá dois unicos valores, eguaes, um positivo e outro negativo.

Represente-se por m o valor arithmetico de $\sqrt{A}$, visto como sendo $x^2=A$, poderemos pelas regras da arithmetica achar o numero positivo que levantado ao quadrado produza x^2. Ter-se-ha pois

$$x^2=m^2$$

E, porque a differença de duas quantidades eguaes é zero, segue-se que será

$$x^2 - m^2 = 0$$

ou

$$(x + m)(x - m) = 0$$

Para um producto de dois factores ser zero, é necessario e sufficiente que algum dos dois factores o seja. Por conseguinte, para $x + m = 0$, vem $x = -m$; e para $x - m = 0$, vem $x = + m$. Logo x terá dois valores eguaes a m, um positivo, e outro negativo.

58. *Resolução da equação.* Será do segundo grau uma equação a uma incognita, quando fôr 2 o maior dos expoentes da incognita em qualquer termo. Uma equação do segundo grau a uma incognita só poderá conter tres especies de termos, a saber: termos do segundo grau, termos do primeiro, e termos independentes da incognita. Representando a incognita por x, será a formula, a que se poderão reduzir todas as equações do segundo grau, a seguinte $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, e c são quantidades positivas ou negativas, e conhecidas. Quando a equação tiver esta fórma, diz-se *completa*; e, quando lhe faltar algum dos termos (o do primeiro grau ou o conhecido), diz-se *incompleta*.

Trataremos primeiramente de resolver as duas equações incompletas $ax^2 + bx = 0$, e $ax^2 + c = 0$.

Para a primeira temos

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Para que o producto $x(ax + b)$ seja zero é necessario e sufficiente que um dos factores o seja. Portanto, a equação (1) é satisfeita para $x = 0$, e $ax + b = 0$. Esta dá $x = -\frac{b}{a}$

São, pois, as soluções ou *raizes* da equação (1)

$$x = 0, \text{ e } x = -\frac{b}{a}$$

A equação $ax^2 + c = 0 \ldots\ldots (2)$

dá

$$ax^2 = -c, \; x^2 = -\frac{c}{a}, \text{ e } x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

As duas raizes são pois

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \; x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Tal é o modo de resolver a equação do segundo grau nas suas duas fórmas incompletas.

Para resolvermos a equação completa procederemos do modo seguinte. Tomando a equação $a x^2 + b x + c = 0$, multipliquemos os seus dois membros por $4 a$. Vem

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c = 0$$

ou

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x = - 4 a c$$

Notando que os dois termos $4 a^2 x^2$ e $4 a b x$ se podem considerar como os dois primeiros termos do desinvolvimento do quadrado de $(2 a x + b)$, e notando que para se ter o desinvolvimento total se deveria juntar o quadrado do segundo, b, que é b^2, segue-se que juntando a ambos os membros este termo, virá

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + b^2 = b^2 - 4 a c$$

ou

$$(2 a x + b)^2 = b^2 - 4 a c$$

Extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros, virá:

$$2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

da qual, resolvida em ordem a x, se tira

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

Observando este valor de x, poderemos estabelecer a seguinte regra para se escrever o valor da incognita em qualquer equação, uma vez que essa equação esteja reduzida á fórma geral supra-indicada.

Eguala-se a incognita á um quebrado cujo numerador é o coefficiente da mesma incognita no primeiro grau tomado com signal contrario, e mais ou menos a raiz quadrada do quadrado d'esse coefficiente diminuido do quadruplo do coefficiente do termo que contêm a incognita no segundo grau multiplicado pela quantidade conhecida.

Do que expuzemos se infere que, para a resolução das equações do segundo grau, se deve ter em vista, primeiramente, o reduzil-as á fórma geral já citada, para depois se lhes applicar a regra que acabamos de apresentar.

59. Tomando novamente a equação $a x^2 + b x + c = 0$, e dividindo por a todos os termos da equação, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

e se representarmos $\frac{b}{a}$ por p, e $\frac{c}{a}$ por q, poderemos pôr

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

E' esta outra formula das equações do segundo grau completas, a uma incognita, quando o coefficiente do termo do segundo grau em x seja a unidade.

Para resolver qualquer equação reduzida a esta fórma, notaremos que x^2 e $p\,x$ são termos que se podem considerar como os dois primeiros de $(x + \frac{1}{2}p)^2$, e que para se ter o desinvolvimento completo do quadrado, se deveria ter a mais o termo $\frac{1}{4}p^2$, que é o quadrado do segundo termo $\frac{1}{2}p$. Juntando, pois, a ambos os membros da equação $\frac{1}{4}p^2$, depois de ter passado para o segundo o termo conhecido q, virá

$$x^2 + p\,x + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

ou

$$(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros

$$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

Em vista d'este valor poderemos assentar a seguinte regra:

Quando uma equação estiver reduzida á fórma

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

para termos o valor de x, *egualaremos* x *á metade do coefficiente da incognita no primeiro grau com o signal contrario, mais ou menos a raiz quadrada d'este coefficiente levantado ao quadrado diminuido da quantidade conhecida.*

Em vista do que dissemos nos dois numeros anteriores se vê que, para a resolução das equações do segundo grau a uma incognita, a primeira coisa que se deve fazer é reduzil-as á qualquer das fórmas, $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, ou

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

e applicar-lhes immediatamente as regras dadas. Daremos alguns exemplos.

1.º Seja a equação

$$(x-3)(x+5)=2x+1$$

Effectuando a multiplicação indicada no primeiro membro, tem-se

$$x^2-3x+5x-15=2x+1$$

transpondo e reduzindo,

$$x^2=16,\quad x=\pm\sqrt{16}$$

$$\therefore\quad x=\pm 4$$

2.º Resolver $\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{2}{x}=3$

Livrando de denominadores,

$$6x+2x+2=3x^2+3x$$
$$8x-3x-3x^2+2=0$$
$$-3x^2+5x+2=0$$
$$3x^2-5x-2=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2+4\times 3\times 2}}{2\times 3}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}$$

$$x=\frac{5\pm 7}{6}$$

isto é, as raizes são, segundo os signaes considerados,

$$x'=2,\quad x''=-\frac{1}{3}$$

3.º Resolver

$$\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$$

Livrando de denominadores, virá

$$2(x-2)(x-4)=3(x-1)(x-4)+2(x-1)(x-2)$$
effectuando,
$$2x^2-12x+16=3x^2-15x+12+2x^2-6x+4$$
reduzindo e transpondo,
$$9x-3x^2=0$$
dividindo por 3
$$3x-\ x^2=0$$
tirando x como factor commum,
$$x(3-x)=0$$
d'onde
$$x'=0, x''=3$$

4.º Resolver
$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$$
Livrando de denominadores,
$$(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)=(x-1)(x-2)$$
effectuando
$$x^2-2x-3x+6+x^2-x-3x+3=x^2-x-2x+2$$
reduzindo
$$2x^2-9x+9=x^2-3x+2$$
transpondo
$$x^2-6x+7=0$$
finalmente
$$x=3\pm\sqrt{9-7}$$
$$x=3\pm\sqrt{2}$$
Logo, as duas raizes, são
$$x'=3+\sqrt{2},\qquad x''=2-\sqrt{2}$$

60. *Problemas do segundo grau a uma incognita.* Os problemas cuja resolução produz equações do segundo grau, differem dos que involvem equações do primeiro, sómente em que, dando aquellas equações *duas* raizes ou *dois* valores para a incognita, ha tambem *duas* soluções, apparentemente, para o problema. Muitas vezes ambas estas soluções são convenientes; mas frequentemente só uma se deverá considerar como verdadeira solução do problema, apezar de ambas satisfazerem ás equações que lhes traduz o enunciado. Exemplos servirão de esclarecimento ao que dizemos.

1.º *Problema. Achar dois numeros inteiros positivos conse-*

cutivos, o triplo de cujo producto exceda em 8 unidades o quadruplo de sua somma.

Como se trata de numeros inteiros consecutivos que differem entre si, o que é sabido, de uma unidade, represental-os-hemos por x, e $x + 1$. Em vista do enunciado, ter-se-ha a seguinte equação

$$3x(x+1) = 4\left[x + (x+1)\right] + 8$$

ou

$$3x(x+1) = 4(2x+1) + 8$$

Resolvendo

$$3x^2 + 3x = 8x + 4 + 8$$

$$3x^2 + 3x = 8x + 12$$

$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm 13}{6}$$

Logo,

$$x' = 3, \text{ e } x'' = -\frac{4}{3}$$

A primeira d'estas duas raizes, ambas as quaes satisfazem á equação, é a que satisfaz ao problema, indicando que o primeiro numero inteiro pedido é 3, e o segundo 4. A outra raiz é incompativel com a natureza da questão, visto que se pedem simplesmente numeros inteiros e positivos.

2.° *Problema. Duas peças de panno que medem respectivamente 6 e 14 metros, foram comprados por $10^{Lb.}$ $12^{sh.}$; e o comprador nota que dispendendo $3^{Lb.}$ obterá um metro mais da segunda peça do que da primeira. Pergunta-se que preço por metro tem elle de pagar para cada peça.*

Represente x o preço em shillings da primeira peça; é claro que por $3^{Lb.}$ se poderão obter (por que a libra tem 20 shillings) $\frac{60}{x}$ metros; por conseguinte, da segunda peça, por

3Lb. obtem-se $\left(\frac{60}{x}+1\right)$ metros, de fórma que o custo da segunda é por metro,

$$\frac{60}{\frac{60}{x}+1}=\frac{60x}{60+x}\text{ shillings.}$$

Portanto, notando que 10Lb. 12sh. são 212 shillings, tem-se

$$6x+\frac{60x}{60+x}\times 14=212$$

livrando de denominadores

$$360x+6x^2+840x=1272+212x$$
$$6x^2+988x=12720$$

que, resolvido, dá

$$x=\frac{-988\pm\sqrt{(988)^2+24\times 12720}}{12}$$

d'onde $\quad x'=12 \quad x''=-176\frac{2}{3}$

A segunda d'estas duas raizes, apezar de satisfazer á equação que traduziu o problema, não é solução d'este. A primeira solução é de 12 shillings para preço do metro na primeira peça, e $\frac{60x}{60+x}$ ou 10 shillings para preço do metro na segunda.

3.º *Problema. Qual é o numero que sommado com o seu quadrado dá 20?*

Seja x o numero pedido, ter-se-ha a seguinte equação:

$$x^2+x=20$$

ou

$$x^2+x-20=0$$

D'onde

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+20}$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2}$$

logo $\quad x'=4, \quad x''=-5$

Os dois numeros 4 e — 5 satisfazem á operação e ao problema. Effectivamente, para o primeiro tem-se:

$$4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

e para o segundo

$$(-5)^2 + (-5) = 25 - 5 = 20$$

4.º *Problema. Determinar sobre a linha recta que unir dois focos luminosos L e L' de intensidades respectivas a 4 e 9, e separados de 30 metros, o ponto por elles egualmente illuminado.*

X —— $i = 4.\ L$ —— P —— $L'\ i' = 9$ —— Y

: .... x ..... :

: .... 30^m .... :

Seja a linha recta XY aquella em que se acham os dois focos luminosos L e L' distanciados de 30 metros, e com as intensidades i e i', respectivamente eguaes a 4 e 9. Representa P o ponto egualmente illuminado pelos focos L e L', situado a uma distancia x de L, e portanto a uma distancia $30^m - x$ de L'. Sabe-se pela physica que *intensidade luminosa* é a luz projectada á unidade de distancia, e que essa intensidade varía na razão inversa do quadrado das distancias do ponto illuminado ao foco de luz. N'esta intelligencia, se as quantidades de luz emittidas pelos dois focos L e L' são i e i' a 1^m de distancia, serão $\frac{i}{2^2}$ e $\frac{i'}{2^2}$, $\frac{i}{3^2}$ e $\frac{i'}{3^2}$, $\frac{i}{4^2}$ e $\frac{i'}{4^2}$, etc., respectivamente para as distancias de 2, 3, 4, etc., metros. Ora como o ponto P, que dista x metros de um dos focos e $30 - x$ do outro, deve ser egualmente illuminado por elles, e como elles projectam sobre P quantidades de luz representadas pelas formulas $\frac{i}{x^2}$ e $\frac{i'}{(30-x)^2}$, ou $\frac{4}{x^2}$ e $\frac{9}{(30-x)^2}$, virá

$$\frac{4}{x^2} = \frac{9}{(30-x)^2}$$

Resolvendo, temos

$$\frac{(30-x)^2}{x^2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{30-x}{x} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

Portanto

$$30 - x = \pm \frac{3}{2} x$$

$$30 = \pm \frac{3}{2} x + x$$

$$60 = \pm 3x + 2x$$

ou

$$60 = 5x, \text{ e portanto } x = 12$$

$$60 = -x \quad \text{»} \quad x = -60$$

As soluções do problema são as da equação. Isto é, para $x = 12$, intender-se-ha que o ponto egualmente illuminado está *para a direita* de L e d'elle distante 12 metros; para $x = -60$ intender-se-ha estar o ponto pedido *á esquerda* de L, e a uma distancia dupla da que separa os dois focos luminosos.

DOS LOGARITHMOS

61. Chamam-se **logarithmos** dos termos de uma progressão geometrica começando por 1 aos termos correspondentes da progressão arithmetica começando por zero. Isto é, tendo as duas progressões

$$\left.\begin{matrix} \div 0;\ a;\ 2a;\ 3a; \ldots\ldots (n-1)a;\ na \\ \because 1;\ A;\ A^2;\ A^3; \ldots\ldots A^{n-1};\ A^n \end{matrix}\right\} \ldots\ldots (1)$$

a primeira arithmetica, cuja razão é a, e a segunda geometrica de razão egual a A, os termos da primeira serão os logarithmos dos correspondentes da segunda.

Costuma definir-se tambem logarithmo: *o expoente da potencia a que se deve levantar certo numero escolhido e chamado base para se obter o numero dado.* Estas duas definições, apparentemente discordantes, concordam todavia entre si. Para o demonstrarmos, tomem-se com outra fórma as duas progressões (1), e sejam

$$\left.\begin{matrix} \div\ -2h;\ -h;\ 0;\ h;\ 2h; \ldots\ldots nh. \\ \because \dfrac{1}{(1+K)^2};\ \dfrac{1}{1+K};\ 1;\ (1+K);\ (1+K)^2 \ldots (1+K)^{nh} \end{matrix}\right\} \ldots (2)$$

Represente a o valor do termo $\sqrt[h]{1+K}$, isto é

$$a = \sqrt[h]{1+K}$$

d'onde se tira, levantando a h, $a^h = 1 + K$

Substituindo este valor de $1+K$ na seguuda progressão, resultarão as duas seguintes

$$\ldots -2h; -h;\ 0;\ h; 2h;\ 3h; \ldots nh \ldots$$
$$\ldots a^{-2h}; a^{-h};\ a^0;\ a^h;\ a^{2h};\ a^{3h} \ldots\ a^{nh} \ldots$$

Conforme a primeira definição, h, $2h$, $3h, \ldots nh$, serão os logarithmos dos numeros correspondentes da segunda progressão a, a^h, a^{2h}, $a^{3h}, \ldots a^{nh}$; isto é, o logarithmo de um numero a^{nh} é o expoente nh, a que se deve levantar o numero invariavel a, chamado *base*, para produzir esse numero. São pois concordantes as duas definições.

62. Quando a base do systema de logarithmos é o numero 10, os logarithmos dizem-se *vulgares*. Comprehende-se facilmente que são infinitos os systemas de logarithmos que se podem formar, porque infinita é a serie dos numeros.

63. *Propriedades geraes dos logarithmos.* As propriedades dos logarithmos podem ser *geraes* ou *particulares*. As primeiras convêm a qualquer systema; as segundas, a um systema certo e determinado.

As propriedades geraes dos logarithmos são as seguintes:

1.ª *O logarithmo de producto é egual á somma dos logarithmos dos factores.*

2.ª *O logarithmo de quociente é egual á differença entre o logarithmo do dividendo e o do divisor.*

3.ª *O logarithmo de potencia é egual ao logarithmo da base da potencia multiplicado pelo expoente da mesma potencia.*

4.ª *O logarithmo de raiz é egual ao logarithmo da quantidade affecta do radical dividida pelo indice da raiz.*

Demonstraremos estas differentes propriedades.

I. Sejam n e n' dois numeros cujos logarithmos representaremos por x e x' na base a. Ter-se-ha, por definição de logarithmo,

$$n = a^x = a^{\text{Log.}\,n} \ldots (1),\ n' = a^{x'} = a^{\text{Log.}\,n'} \ldots (2)$$

representando por *Log.* a palavra *logarithmo*. Multiplicando as duas egualdades (1) e (2) ordenadamente, tem-se

$$n n' = a^{\text{Log.}\,n} \times a^{\text{Log.}\,n'} = a^{\text{Log.}\,n + \text{Log.}\,n'}$$

e, por definição,

$$\text{Log.}\,(n n') = \text{Log.}\ n + \text{Log.}\,n',$$

por ser $\text{Log.}\,n + \text{Log.}\,n'$ o expoente a que se deve levantar a para produzir o producto $n n'$.

II. Tomando as mesmas duas egualdades (1) e (2), e dividindo-as ordenadamente, vem

$$\frac{n}{n'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = \frac{a^{\text{Log. n}}}{a^{\text{Log. n'}}} = a^{\text{Log.} - \text{Log. n'}}$$

logo o logarithmo de $\frac{n}{n'}$ é Log. n — Log. n', o que demonstra a segunda propriedade enunciada.

III. Para demonstrarmos a terceira propriedade, tome-se a egualdade (1)

$$n = a^{\text{Log. n}}$$

e eleve-se tanto o primeiro como o segundo membro a p; virá

$$n^p = (a^{\text{Log. n}})^p = a^{p\,\text{Log. n}}$$

e, por definição de logarithmos, será

$$\text{Log. } (n^p) = p \text{ Log. } n$$

IV. A quarta propriedade demonstra-se do modo seguinte.

$$\text{Seja } \sqrt[m]{a} = r$$

Levantando ambos os membros d'esta egualdade a m, vem

$$a = r^m$$

Applicando-lhe a 3.ª propriedade antecedentemente demonstrada, temos

$$\text{Log. } a = m \text{ Log. } r$$

d'onde

$$\frac{\text{Log. } a}{m} = \text{Log. } r$$

$$\frac{\text{Log. } a}{m} = \text{Log. } \sqrt[m]{a}$$

o que justifica a quarta propriedade.

64. *Propriedades dos logarithmos vulgares.* Dissemos que os logarithmos tinham propriedades communs a todos os systemas, chamadas *geraes*, e que algumas propriedades poderia haver só restrictas a um systema em particular. Sendo o systema dos logarithmos vulgares, ou de base 10, o mais usualmente adoptado, trataremos das suas propriedades particulares. São as seguintes:

1.ª *Só os numeros que são potencias perfeitas de 10, têem logarithmos commensuraveis.*

Seja N um numero cujo logarithmo commensuravel é $\frac{m}{n}$; será N uma potencia exacta de 10.

Por definição é

$$N = 10^{\frac{m}{n}}$$

ou

$$N^n = 10^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Os unicos divisores de N são 2 e 5; porque todo o divisor de N é-o tambem de N^n, e portanto de 10^m. Ora não póde dividir qualquer potencia de 10 sem ser 2 ou 5; logo os unicos divisores de N são 2 e 5; e teremos

$$N = 2^p \times 5^q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Substituindo em *(A)*, vem

$$2^{pn} \times 5^{qn} = 2^m \times 5^m$$

E porque um numero só é decomponivel n'um systema de factores primos, será $pn = m$, $qn = m$, ou $pn = qn$, ou $p = q$. Logo *(B)* torna-se em $N = (10)^p$, isto é, N é uma potencia exacta de 10.

2.ª *O Logarithmo vulgar de qualquer potencia de 10, é egual ao expoente da potencia,* porque, tendo, por exemplo, a potencia 10^m, o seu logarithmo é $m \times$ Log. 10, e como Log. 10 é egual a 1, será Log. $10^m = m$.

3.ª *Quando se multiplica ou divide um numero por qualquer potencia de 10, o seu logarithmo vulgar augmenta ou diminue em tantas unidades, quantas tiver o expoente de 10.*

Sendo Log. N o logarithmo vulgar de N, teremos

$$\text{Log. } (N \times 10^m) = \text{Log. } N + \text{Log. } 10^m$$
$$\text{Log. } (N \times 10^m) = \text{Log. } N + m$$

Para o caso de divisão, tinhamos

$$\text{Log. } (N : 10^m) = \text{Log. } N - \text{Log. } 10^m$$
$$\text{Log. } (N : 10^m) = \text{Log. } N - m$$

o que demonstra a propriedade enunciada.

4.ª Constando o logarithmo de um numero de duas partes, uma inteira, chamada *caracteristica*, e outra fraccionaria, chamada *mantissa*, a regra para achar a caracteristica do logarithmo de um numero, é a seguinte: *tomam-se tantas unidades quantas as casas que no numero forem, desde o algarismo das unidades exclusivé, até ao primeiro algarismo significativo da esquerda inclusivé. A caracteristica será positiva se o numero fôr maior do que 1, e negativa no caso contrario.*

Para demonstrarmos esta propriedade temos de considerar dois casos: 1.º quando o numero fôr > 1; 2.º quando fôr < 1.

No primeiro caso, seja o numero $4528{,}26 = N$.

Este numero está comprehendido entre $10^3 = 1000$, e $10^4 = 10000$, isto é

$$10^3 < 4528{,}26 < 10^4$$
$$\text{Log. } 10^3 < \text{Log. } N < \text{Log. } 10^4$$
$$3 < \text{Log. } N < 4$$

logo, Log. N, ou Log. 4528,26, está comprehendido entre 3 e 4; é maior do que 3 e menor do que 4; isto é:

$$\text{Log. } N = 3 + d$$

representando d uma quantidade inferior á unidade.

No segundo caso, seja o numero $N = 0{,}0032$.

Será
$$0,001 < N < 0,01$$
$$\frac{1}{10^3} < N < \frac{1}{(10)^2}$$
$$\text{Log. } \frac{1}{10^3} < \text{Log. } N < \text{Log } \frac{1}{10^2}$$
$$-3 < \text{Log. } N < -2$$

Por conseguinte Log. N, ou Log. $0,0032 = -3 + d$, sendo d a mantissa.

5.ª *A mantissa positiva do logarithmo de qualquer numero não depende da posição da virgula no mesmo numero.*

Quer isto dizer, que os dois numeros 34, 27 e 3427, por exemplo, têem para mantissas de seus logarithmos a mesma quantidade, diversificando apenas as caracteristicas.

Temos pois
$$\text{Log. } 34,27 = 1 + d$$
e por ser
$$3427 = 34{,}27 \times 10^2$$
será
$$\text{Log. } 3427 = \text{Log. } (34,27 \times 10^2)$$
$$\text{Log. } 3427 = \text{Log. } 34,27 + 2$$
$$\text{Log. } 3427 = 1 + d + 2$$
$$\text{Log. } 3427 = (1 + 2) + d = 3 + d$$

Vê-se, pois, que a mantissa d se conserva a mesma para os dois logarithmos.

65. Não apresentaremos aqui o processo para achar a mantissa do logarithmo vulgar de qualquer numero, porque vem exposto em quaesquer *Tabuas de logarithmos.*

EXERCICIOS DE ALGEBRA

66. Terminaremos este volume apresentando para estudo pratico os seguintes exercicios algebricos:

Dividir: $8\,y^6 - x^6 + 21\,x^3\,y^3 - 24\,x\,y^5$ por $3\,x\,y - x^2\,y^2$

» $18\,a^4 + 9\,b^4 + 8\,a^2\,b^2$ por $4\,a^2 + 3^2\,b - 4\,a\,b$

Achar o quociente até ao 6.º termo de 1 por $(1 + x + x^2)$

Dividir a por $a+b$, até ao 7.º termo.

Resolver: $0{,}125 - 0{,}3\,x = 0{,}5\,x + 0{,}045$

» $\frac{5}{8}x - \frac{1}{6}x + 2 = x + \frac{3}{8}$

» $\frac{4}{9}x = x - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}x - 4$

» $\frac{10}{11}x - \frac{13}{9} + \frac{6}{7}x - \frac{2}{9}x - \frac{4}{11}$

» $\frac{2}{5}x + 2 = \frac{x}{2}$

» $\frac{7}{8}x = \frac{5}{12}x + 17\frac{1}{2} - x$

$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 0{,}9 - 2\frac{1}{6}$

Resolver os seguintes problemas:

As edades sommadas de duas creanças dão 15 annos. A edade da primeira mais metade da da segunda dão uma somma egual ao dobro da edade da segunda. Quaes são as edades das duas creanças?

Um individuo depois de gastar metade do dinheiro que trazia, de receber uma libra, e de gastar d'ella cinco shillings, ficou com tanto dinheiro como a principio tinha. Pergunta-se: que dinheiro trazia?

Um numero é formado de dois algarismos. Sabe-se que o algarismo das dezenas é tres vezes maior que o das unidades, e que o numero todo é maior septe vezes do que a somma dos dois algarismos. Qual é o numero?

Achar tres numeros inteiros consecutivos taes que a terça parte do maior seja duas vezes menor do que um quinto da somma dos outros dois.

Um comboio parte da estação A ás 11 horas da manhã, em direcção a B, com a velocidade de 25 kilometros por hora. Outro comboio parte de R á tarde e caminha entre A e B com a velocidade de 35 kilometros por hora, chegando a B 25 minutos depois do primeiro comboio. Suppondo que a distancia entre R e A é de 21 kilometros, qual é a distancia de R a B?

Um dos ponteiros de um relogio faz uma revolução em a horas, e o outro em b horas. Suppondo que á partida estavam sobrepostos, quando se incontrarão novamente? (Hyp. $a > b$)

Dividir a recta a em duas partes taes que a differença de seus quadrados seja egual a b^2

Resolver os systemas seguintes:

1.º
$$x - 3y - 2z = 1$$
$$2x - 3y + 5z = -19$$
$$5x + 2y - z = 12$$

2.º
$$3x - 2y = 5$$
$$4x - 3y + 2z = 11$$
$$x - 2y - 5z = -7$$

3.º
$$x + y = 1$$
$$y - z = 9$$
$$z + x = 5$$

Resolver as seguintes equações do segundo grau:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$8x^6 + 63x^3 = 8$$
$$216x^7 + 19x^4 = x$$
$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0$$
$$4x^4 - 20x^3 + 23x^2 + 5x = 6$$
$$x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x = 0$$
$$108x^4 + 51x^2 = 20x(9x^2 - 1) + 7$$
$$37x^2 - 4x^4 = 9$$
$$16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$$
$$32x^{10} + 1 = 33x^5$$

Achar a solução dos seguintes problemas:

A executa um trabalho em 9 horas menos do que B. A e B simultaneamente fazem-n'o em 20 horas. Que tempo gastaria cada um?

Ha tres linhas rectas, as duas primeiras das quaes sommadas dão um comprimento egual a $\frac{4}{7}$ da terceira; e a somma dos quadrados sobre ellas construidos é egual a um metro quadrado. Quaes são os comprimentos das tres rectas?

Ha um numero formado de dois algarismos. Um d'estes é o quadrado do outro, e juntando 54 ao numero dado, obtem-se o mesmo numero invertido. Qual é o numero?

FIM