PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

FUNCÇÕES
E
EQUAÇÕES NUMERICAS

POR

Luiz Feliciano Marrecas Ferreira
Tenente-coronel de Engenharia
Lente na Escola do Exercito e Instituto Industrial
e Commercial de Lisboa, etc., etc.

CADA VOLUME 50 REIS

CADA VOLUME 50 REIS

LISBOA
SECÇÃO EDITORIAL DA COMPANHIA NACIONAL EDITORA
Adm. Justino Guedes
Largo do Conde Barão, 50
Agencias: PORTO — Largo dos Loyos, 47, 1.º
RIO DE JANEIRO—R. da Quitanda, 38
1898

NUMERO
207

Funcções e equações numericas

I. Funcções [1]

1. No estudo das questões sobre que recae o cálculo, as quantidades que n'elle entram recebem designações diversas, e são classificadas segundo os fins que teem a desempenhar.

Em todo o curso de uma questão, ou simplesmente n'algum dos aspectos por ella apresentados, quantidades ha que manteem fixos os seus valores; n'outras, pelo contrário, manifesta-se a variabilidade; todas se acham, porém, ligadas e devem concorrer egualmente para o resultado.

Tratando-se, por exemplo, de triangulos da mesma área, veremos que esta pode ter um valor explicito, ou por determinar, mas sempre constante, achando-se ligada aos valores dos lados, susceptiveis de variar em larga escala, satisfazendo, comtudo, á condição de ser o valor de qualquer d'elles comprehendido entre a somma e a differença dos valores dos outros dois, bem como á de não produzirem triangulos de área differente.

A primeira divisão das quantidades, que ao espirito se impõe, é nos dois grupos seguintes: constantes e variaveis.

Nas relações estabelecidas pela geometria entre lados e angulos de um triangulo, podemos suppor, n'um estado da questão sujeita a exame, que um dos angulos de valor constante é agudo; n'outro estado da questão, recto ou

[1] O presente trabalho é principalmente destinado a servir de introducção ao estudo do cálculo financeiro no Instituto Industrial e Commercial de Lisboa. Os alumnos veem habilitados com o conhecimento de mathematica dos lyceus, noções de geometria analytica e cálculo infinitesimal, dadas no proprio estabelecimento.

obtuso. E, apesar de se ter dado para esta quantidade a variação de valor, não deixa ella por tal circumstancia de ser collocada no grupo das constantes, visto que no mesmo estado não soffre nenhumas variações.

Se quizermos estudar a generalidade da fórmula de Newton para o desenvolvimento da potencia de um binomio, podemos suppôr, em primeiro logar, que o expoente é inteiro e positivo; passar em seguida ao caso, em que é fraccionario e positivo; por ultimo consideral-o como negativo. Tres estados, ou aspectos diversos, comporta esta questão, e em cada um d'elles o expoente tem um valor constante, emtanto que os termos do binomio devem ser reputados como variaveis. E' n'estas condições que se devem estabelecer os limites de applicação da fórmula.

Por outro lado, as quantidades, variaveis n'um estado da questão, podem receber valores fixos n'outro estado, passando assim ao grupo das constantes.

Como se fez, ha pouco, podemos, n'um dos estados de certa questão, procurar os valores que devem ter os lados de um polygono, para que a área d'este seja expressa por um numero determinado, e, n'outro estado da questão, suppôr os lados constantes e determinar a escala das variações, a que a área resultante está sujeita. N'este caso, deu-se uma inversão nos dois grupos de quantidades que estamos considerando; passando depois a figurar como variaveis as que a principio se mantinham constantes, e inversamente.

Se fôrmos indagar quaes as condições a que teem de satisfazer dois factores variaveis, para que o producto d'elles seja uma constante, reconheceremos que os seus valores devem ser os das coordenadas de um ponto de uma hyperbole, referida ás asymptotas, cujo parâmetro seja essa constante; suppondo, em seguida, um dos factores constante, variavel o outro, bem como o producto, as duas variaveis, agora, devem ser as coordenadas correntes de uma recta, cujo coefficiente angular é dado pelo novo valor da constante.

E' pois forçoso distinguir os diversos estados de uma questão, para podermos acceitar aquellas duas designações, imprescindiveis na linguagem do cálculo.

As ligações, a que uma quantidade tem de se submetter no curso de qualquer operação, podem permittir-lhe o toma um numero indefinido de valores, como se dá, por exemplo, com uma incognita n'uma equação que tem ainda outra ou mais, e n'esse caso é variavel sem que se lhe ponham limites.

Dentro de limites determinados e pouco distantes ás vezes, variam quantidades, como o seno e o coseno d'um arco.

Em todas as equações com uma só incognita podem ser attribuidos a esta tantos valores quantas unidades houver no gráu da equação, e a incognita não representará, em consequencia d'essa diversidade, mais do que determinadas constantes; é um grupo de valores condensado, por assim dizer, n'uma unica lettra, o qual não pode permittir que a incognita seja tida na conta de variavel. Se, porém, na equação: $F(x) = o$ suppuzermos que o polynomio do primeiro membro é a ordenada de uma curva: $y = F(x)$, tomando x para abscissa, a primitiva equação representará apenas valores particulares de x, que a consideração da curva nos apresenta já como uma variavel. Da mesma sorte o polynomio, ao qual se não podiam assignar variações nenhumas, nullo como era, é no segundo caso uma variavel.

N'uma equação com n incognitas podemos dar valores arbitrarios a n-1 d'estas, quaesquer que ellas sejam, resultando de cada systema de valores assim attribuidos, um determinado para a restante. Todas essas n-1 incognitas são variaveis, bem como a ultima, mas esta depende d'aquellas, completamente arbitrárias.

Os lados do triangulo podem receber um numero indefinido de valores; mas, arbitrando os de dois, fica o do terceiro dependente dos que démos aos primeiros, não fixo, como succedia no exemplo anterior á incognita restante, pois pode ainda variar dentro dos limites impostos pelas relações que entre si teem a guardar aquelles lados, qualquer dos quaes deve ser, como é sabido, menor que a somma dos outros dois e maior que a differença d'estes.

Em geral, se n'uma questão entrarem m variaveis, sujeitas a n condições, sendo $m > n$, podemos dar valores arbitrarios a m-n d'essas variaveis, ficando os das n restantes dependentes dos attribuidos ás primeiras.

D'ahi a distincção das variaveis n'estes dois importantes grupos: independentes e dependentes.

As variaveis dependentes são chamadas *funcções;*

sim, o circulo e a circumferencia são funcções do raio; o volume de um muro funcção das dimensões; a somma é funcção das parcellas; o producto, funcção dos factores; e em muitos exemplos, que a cada passo se nos deparam, encontraremos bem evidente a distincção d'essas variaveis. Se as variaveis independentes forem representadas por x, y, z, u, w..., uma variavel, d'ellas dependente, será designada pela expressão:

$$\alpha = \mathrm{F}\,(x, y, z, u, w\ldots)$$

empregando a lettra do primeiro membro para indicar essa variavel, cuja dependencia se tornou por este modo bem patente.

Quando quaesquer circumstancias não preceituem o contrário, é arbitrária a escolha das variaveis, ou a divisão em grupos, de sorte que podemos considerar uma d'ellas como dependente, ou independente, e, d'este modo, a relação anterior corresponderá a qualquer das seguintes:

$$x = f\,(\alpha, y, z, u, w\ldots)\,;\ y = \varphi\,(\alpha, x, z, u\ldots)\ldots$$

A lettra indicadora da funcção varia de variavel para variavel, denotando que as operações a fazer entre as variaveis, ou as formas de funcção, soffrem mudanças.

Sendo: $ax + by = c$, podemos indifferentemente escrever:

$x = \frac{c - by}{a}$, ou: $y = \frac{c - ax}{b}$, tomando ora uma ora outra incognita como dependente, ou independente.

Uma equação com uma incognita x é geralmente representada por $F(x) = 0$, valor particular de $y = F(x)$. Se ao valor a de x corresponder b para y, designa-se essa correspondencia por $b = F(a)$; da mesma sorte, se do valor 0 de x provier c para y, escreve-se: $c = F(o)$. E, assim, o caracteristico de funcção tem sido applicado, e continuará com vantagem a sel-o, por simplicidade de linguagem, a valores particulares das variaveis, isto é, a constantes.

2. Classificação de funcções. — A variavel dependente está ligada ás independentes e ás constantes por meio de uma equação; se esta se achar resolvida em ordem á primeira, a funcção diz-se *explicita*, e no caso contrário *implicita*. $y = F(x)$ é uma funcção explicita; $F(x, y) = 0$ — é implicita. Quando fôr um polynomio racional e inteiro em relação ás incognitas, constantes os coefficientes dos seus diversos termos, diz-se *algebrica*, no caso contrário *transcendente*. Exemplificam as ultimas: os logarithmos, exponenciaes, as funcções trigonometricas, e, além d'estas, as mais simples do enorme grupo, em que se registam algumas de uma complexidade notavel e de propriedades interessantissimas, como são, por exemplo, as funcções ellipticas, empregadas com extraordinario successo na resolução de equações e de muitos problemas, e que constituem, em muitos casos, um instrumento de pesquisa de primeira ordem.

Nas algebricas, a ligação com as variaveis só pode ser feita por qualquer das operações fundamentaes: addição, subtracção, multiplicação, divisão, elevação a potencias (quando o expoente fôr commensuravel) e extracção de raizes (indice egualmente commensuravel). Se tivermos $y = x^m$, ou: $y = \sqrt[m]{x}$, sendo m um numero incommensuravel, a funcção será transcendente.

Tambem se podem dividir em *inteiras*, ou *fraccionárias*, chamando-se *racionaes* quando nenhum radical affecta as variaveis, e *irracionaes* no caso contrário.

N'uma equação em que entram só duas incognitas, se exprimirmos, como precedentemente se fez, cada uma d'ellas em funcção da outra, obteremos duas funcções, que se denominam *inversas*.

Dividem-se tambem em *simples* e *complexas*. As primeiras são as funcções explicitas, em que a variavel dependente y é ligada a x, egualando aquella a: $a + x$, ax, $\frac{x}{a}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, a^x, log. x, sen. x, arc. sen. x. As complexas dividem-se em *compostas* e *funcções de funcções*; estas derivam das simples, substituindo n'ellas a variavel por uma funcção simples; as compostas, substituindo a e x por funcções simples, ou funcções de funcções. As funcções explicitas, em que as variaveis independentes entram no primeiro gráu, dizem-se *lineares*.

Além de todas estas funcções, expressas pelos meios que a analyse fornece e que por isso se chamam *analyticas*, outras ha que se suppõem sufficientemente conhecidas por uma tabella, em que os valores da funcção apparecem conjuntamente com os das outras variaveis, assignando-se a correspondencia que uns e outros guardam entre si. A estas funcções applica-se a designação de *concretas*, ou *empyricas*. A lei que preside a uma certa ordem de factos estudados pela observação, ou pela experiencia, se fôr susceptivel de uma traducção mathematica, será representada por uma fórmula empyrica, da qual se deduzem com modificações, em geral mui leves, todos os numeros constantes da tabella que serviu para a organisar. Nas sciencias physicas, chimicas e naturaes, sobretudo nos diversos ramos que entram no dominio da engenharia; na parte do cálculo financeiro que respeita a seguros de vida, ou de propriedade ; na estatistica, e em muitos outros casos, em summa, estas funcções teem uma grande importancia e applicação. A funcção empyrica denuncia a ignorancia completa, ou parcial, das causas dos phenomenos ; muitos d'elles, porém, sujeitos a uma theoria que os explica e acompanha em quasi todo o seu desenvolvimento, podem ser apresentados por uma fórmula theorica, a qual todavia necessita de ser sanccionada pela experiencia, que vae dar valores numericos ás constantes que n'ella entram. Assim, a equação de mortalidade de Gompertz admitte tres constantes ; a de Makeham, quatro ; tanto umas, como outras, se deduzem pelas tabellas de mortalidade. As funcções d'este modo obtidas dizem-se *semi-empyricas*, ou *semi-racionaes*.

A diversos grupos de funcções applicam-se tambem nomes especiaes, havendo : funcções trigonometricas, ou circulares ; ellypticas, abelianas, etc. Depois do detido estudo, feito sobre as funcções ellypticas, de que resultou, como está dicto, o conhecimento de propriedades muito interessantes, notou-se que as funcções podem todas ser divididas em grupos, distinctos pelas singularidades n'ellas manifestadas. Este criterio, hoje tido por seguro, foi tomado para base de uma classificação.

3. Continuidade. — Uma funcção pode ser contínua no longo curso dos seus valores ; apresentar, uma ou outra vez, qualquer descontinuidade; não admittir trecho nenhum das suas variações, que seja contínuo. Se aos valores *a* e *b* da variavel independente corresponderem A e B da funcção, esta será contínua n'esse intervallo, quando percorrendo successivamente a primeira variavel todos os estados de grandeza, de um a outro extremo, a outra fôr ao mesmo tempo percorrendo successivamente os estados de grandeza de A a B.

Havendo mais de uma variavel independente, a funcção será contínua, n'um certo intervallo, quando para cada uma d'ellas, como para o conjunto, se realisar a condição anterior.

A esta propriedade da funcção chama-se *continuidade*, e, quando ella se não realisa, diz-se que ha *descontinuidade*, ou que a funcção é *descontínua* n'esse intervallo.

A continuidade, tal como foi definida, refere-se apenas a um intervallo determinado; se ella se mantem, seja qual fôr o intervallo que se considere, a funcção diz-se *contínua*, e *descontínua*, no caso contrário.

A funcção $y = a\ x$, é sempre contínua; uma dizima periodica é sempre descontínua, porque só podemos fazer variar a funcção considerando successivamente as suas differentes casas decimaes; teremos, por exemplo, como valores successivos de $y = 0,(2)$: $y' = 0,2$; $y'' = 0,22\ldots$

Ha uma descontinuidade em $y = \dfrac{a}{x - b}$ para o valor b, de x e um numero infinito d'ellas na seguinte expressão: $y = tgx$, porque a funcção torna-se, como a precedente, infinita, quando os valores de x satisfizerem á equação: $x = \dfrac{2n + 1}{2}\ \pi$, em que n é um numero inteiro arbitrário.

As funcções trigonometricas, fazendo o arco egual ao infinito, limite dos valores que elle pode tomar, tornam-se indeterminadas. A indeterminação ainda se dá n'outras funcções, para valores finitos da variavel independente. E' uma das numerosissimas singularidades que nas funcções se notam, e constitue uma descontinuidade.

A funcção pode tornar-se, a cada passo, de real em imaginária, e inversamente, ou só n'um ou n'outro trecho ser imaginária. No primeiro caso, não pode ser representada por uma curva e não é mais que uma série de descontinuidades; a potencia de expoente variavel de um numero inteiro negativo está n'este caso; quando o expoente fraccionario tiver o numerador impar e o denominador par, ella é imaginária; e entre dois valores d'estes, tomados pelo expoente, por mais proximos que sejam, como fez notar Cournot, podemos sempre considerar uma infinidade de fracções de numeradores impares.

A continuidade requer, pois, que a funcção, n'um intervallo dado, não possa tornar-se infinita, indeterminada, ou estar constantemente passando de real a imaginária, e vice-versa.

Traçando dois eixos coordenados, podemos n'um d'elles tomar como abscissas os valores da variavel independente — suppondo que ha uma só — e no outro os da funcção, sendo o logar geometrico dos pontos relativos a esta, uma curva, quando fôr contínua. A curva pode ser aberta, ou fechada, e no primeiro caso ter um unico ramo, ou muitos; admittir, ou não admittir, descontinuidades, ou pontos singulares; mas é certo que, sendo a funcção contínua durante um certo trecho, por pequeno que este seja, ella virá geometricamente representada por um arco de curva.

4. Differenciaes e derivadas. — Seja *Ad* o logar geometrico que representa os valores da funcção correspondentes aos da variavel independente. Se uma secante *da* girar em tôrno do ponto *d*, o outro ponto de intersecção, *a*, deslocar-se-ha com o movimento da recta, e, no caso de se approximar cada vez mais do primeiro, a corda *da* vae-se tornando cada vez menor, bem como as differenças: ap—dq; op—oq, entre as coordenadas do ponto movel e do ponto fixo. Estas differenças podem respectivamente ser designadas por $\triangle$ y e $\triangle$ x; accrescimos da funcção y e da variavel independente x; quantidades estas, que tendem para o limite zero, á medida que *a* caminhar para *d*, e por isso se chamam *infinitamente pequenos*, designação applicada a todas as variaveis que tendem para aquelle limite. No triangulo rectangulo *adc* (Fig. I) será:

$$\frac{ac}{dc} = \text{tg. adc} = \frac{\triangle y}{\triangle x} \quad , \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \text{tg}\ \delta$$

sendo δ o angulo, formado pela tangente em d com o eixo das abscissas, contado da parte positiva do eixo para a tangente á curva, e esta tangente o limite da posição da secante. tg. δ, expresso em funcção de x, chama-se, a *derivada da funcção* e representa-se pela lettra indicadora da funcção, affecta de uma plica; sendo $y = F(x)$, a derivada será expressa por $F'(x)$. Para um ponto de abscissa ao seu valor é: $F'(a)$.

A derivada é, pois, a tangente do angulo, feito pela tangente á curva com o eixo, em que se tomam os valores de variavel, a que ella se refere.

Se o limite da relação dos accrescimos das coordenadas é tg δ, segue-se que essa relação será egual a este valor, augmentado de uma quantidade, que tende para zero, á medida que essa relação se fôr approximando do seu limite, e por isso: $\Delta y = \Delta x\,[F'(x) + \varepsilon]$. Ao valor $\Delta x.\,F'(x)$ chama-se *differencial* da funcção e representa-se por: $d.F(x)$ ou dy. Teremos assim: $dy = \Delta x.\,F'(x)$. Esta quantidade é indicada na figura pelo segmento bc, para a posição da secante e vae variando com esta; com effeito, $bc = dc.\,\text{tg}\,\delta$; $\text{tg}\,\delta = \text{tg}.\,\widehat{bdc}$; $dc = \Delta x$; logo, $b\,c = dy$.

Tratando-se de uma recta OL, bissectriz do angulo dos eixos, para a qual é: $y = x$ e sempre: $\Delta y = \Delta x$, ou: $F'(x) = \text{tg}.\,45^\circ = 1$, a fórmula da differencial dá: $dx = \Delta x$. As variações d'esta variavel são completamente arbitrárias, emtanto que as da outra se tornam dependentes d'ellas. Podemos, pois, substituir sempre o accrescimo da variavel independente pela sua differencial, do que resulta:

$$dy = F'(x)\,dx \text{ e: } \frac{dy}{dx} = F'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A derivada pode considerar-se de duas maneiras: ou como um limite da relação de duas quantidades infinitamente pequenas, ou como uma simples relação de duas quantidades, tambem infinitamente pequenas: as differenciaes.

Se x experimentar um accrescimo h, o da funcção vem:

$$F(x+h) - F(x) = h\,[F'(x) + \varepsilon]$$

d'onde se conclue:

1.º Se a derivada tiver sempre um valor finito, variando a abscissa entre dois limites determinados, podemos tornar o accrescimo da funcção tão pequeno quanto se queira, porque dentro do parenthese do segundo membro predomina o valor de $F'(x)$ e h pode dar ao producto um valor menor do que qualquer quantidade assignavel, por mais pequena que esta seja. D'onde devemos concluir que: *sendo a derivada finita n'um certo intervallo, a funcção será contínua, e por isso se poderá representar por uma curva.*

Do facto de se tornar a derivada infinita não devemos concluir que ha descontinuidade, porque uma circumferencia é contínua, e a tangente, seja qual fôr o systema de eixos coordenados orthogonaes que se tomar, é em dois pontos perpendicular a um eixo e n'outros dois perpendicular ao segundo; a tangente ha de ter sempre duas posições taes que a derivada se tornará infinita. Não acontece, porém, este facto em outros casos, e por isso não podemos dar á proposição anterior maior generalidade. Se a derivada no intervallo considerado se annullar subsiste a proposição.

2.º *A funcção cresce, quando a derivada fôr positiva, e decresce, quando fôr negativa.* Com effeito, suppondo *h* positivo, o que sempre se pode admittir, o primeiro membro da ultima equação será positivo, ou negativo, segundo o signal da derivada; no primeiro caso cresce a funcção, no segundo decresce. Quando a derivada vier negativa, o angulo da tangente com o eixo das abscissas será obtuso. Se quizessemos suppôr que h era negativo, viria: $F(x-h) - F(x) = -h\,[F'(x) + \varepsilon]$ e concluiamos ainda o mesmo.

3.º *De duas funcções, a que mais cresce é a que tem maior derivada.* Supponhamos: $y = F(x)$, representado pela curva *dA*, e $y = f(x)$, pela curva *d E*. O accrescimo da primeira funcção, que augmenta o valor *O q*, de *x*, da quantidade *q p*, será *a c*, o da segunda *c e;* o angulo da secante *e d* com o eixo das abscissas é sempre maior que o da secante *a d;* a tangente á curva *d E*, em *d*, faz egualmente um angulo maior com esse eixo que a tangente á outra curva *d A*, no mesmo ponto. Vêmos assim, que para a primeira, os accrescimos da ordenada são maiores que os da segunda, relativos á mesma abscissa, e, tambem para ella, o angulo limite feito pela secante, ou a derivada, é maior que para a segunda.

Para uma das curvas: *dA:*

$$F(x+h) - F(x) = h\,[F'(x) + \varepsilon]$$

para a outra: *dE:*

$$f(x+h) - f(x) = h\,[f'(x) + \varepsilon']$$

e

$$\Delta = h\,[f'(x) - F'(x) + \varepsilon'']$$

sendo Δ a differença entre os accrescimos das duas funcções e ε'' um infinitamente pequeno, que tende para zero com h. O primeiro membro cresce, ou decresce, segundo a differença entre as duas derivadas fôr positiva, ou negativa, e d'aquelle accrescimo, ou decrescimo, depende o ser $f(x) > F(x)$, ou o contrário.

4.º *A primeira derivada annulla-se nos pontos maximos e minimos, sendo nos primeiros a segunda derivada negativa, e nos outros positiva.* N'um maximo, dando á respectiva abscissa um accrescimo, ou decrescimo, em ambos os casos decresce a funcção; no primeiro, passamos a ter para $F'(x)$ um valor negativo; no segundo, o valor que vem, é positivo; seguindo-se d'ahi, que a primeira derivada se annulla no ponto considerado. Nos maximos, é por consequencia a tangente á curva parallela ao eixo das abscissas, fazendo um angulo de 180º com a parte positiva d'elle. Ora, este angulo, cuja tangente é $F'(x)$, decresce á medida que x vae crescendo, pois, a derivada de $F'(x)$, ou $F''(x)$, deve ser negativa. Nos minimos, o angulo da tangente é nullo, cresce com a abscissa, a sua derivada é positiva, ou $F''(x)$ positivo.

5. Séries. — Sendo $y = f(x)$ um polynomio inteiro de gráu *m*, funcção contínua, assim como as suas *n-1* primeiras derivadas, para os valores da variavel independente, comprehendidos entre x e x + h, tendo, além d'isso, a derivada de ordem *n* valores determinados, correspondentes aos de x comprehendidos n'esse intervallo, será, admittindo que a funcção é real, assim como aquella variavel — unico caso que nos preoccupa:

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F_{n-1}(x) + R_x$$

Lagrange deu ao resto a seguinte fórmula:

$$R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x + \theta h) \text{ e Cauchy:}$$

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{(1.2.\,.\,n-1)} f^n(x + \theta h)$$

$$\text{sendo: } R_u = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(\theta x), \text{ ou:}$$

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(\theta x)$$

quando na série, de Taylor, annullarmos x, mudando em seguida h em x, resultando a de Maclaurin e devendo para esta fórmula dar-se a continuidade no intervallo de o a x. A primeira série pode escrever-se:

$$\Delta y' = h.\, F'(x') + \frac{h^2}{1.2} F''(x') + \ldots. + R_n$$

para os valores y' e x', e a equação da tangente n'um ponto que tenha estas coordenadas, será:

$$y\text{-}y' = F'(x')(x\text{-}x') \text{ ou: } \Delta y' = h.\, F'(x')$$

e por conseguinte a differença entre a ordenada da curva e a da tangente, para o accrescimo h de x, será o segundo termo do segundo membro do ultimo desenvolvimento, augmentado de todos os outros que lhe ficam á direita; mas como h é muito pequeno, podemos desprezar estes, ficando essa differença representada unicamente peto termo em que ha $F''(x')$. Se esta derivada fôr positiva, a curva fica situada acima da tangente, e será convexa em relação ao eixo das abscissas; sendo negativa, dá-se o inverso. Vêmos d'esta maneira ainda, como são caracterisados os maximos e os minimos pelas segundas derivadas.

Não podendo os valores de várias funcções, como: raizes, logarithmos... ser obtidos senão approximadamente, um dos recursos mais simples que temos, consiste em os desenvolver em série, tomando para valor approximado de cada funcção a somma de alguns termos da série, numero maior ou menor, conforme nos quizermos approximar mais ou menos. Nos cálculos financeiros empregam-se com muita frequencia, quer para reduzir a expressão simples uma fórmula que se apresenta bastante complicada, quer para comparar duas expressões de formas muito diversas. Nas applicações, é indispensavel verificar se se dão as hypotheses, sobre que se baseiam aquelles desenvolvimentos, e se R_n tende para zero, á medida que n cresce.

Ha funcções da mesma variavel que teem formas extremamente diversas, recebendo todavia o mesmo valor para cada valor determinado da variavel; portanto, facilmente se comprehende que devam produzir a mesma série, sendo desenvolvidas pelo mesmo modo. Quando a funcção proposta se pode desdobrar, sendo a somma de duas, ou tres, e uma d'estas annullar-se, assim como todas as suas derivadas, ao annullar-se x, o desenvolvimento não será o da funcção proposta, mas o da parcella d'esta, cujas derivadas, bem como ella, não se annullam para esse valor zero. Canchy, para tornar bem saliente a necessidade do estudo do resto da série, considerou uma funcção exponencial: $\overset{-}{\bullet}\ \frac{1}{x}$ na qual o resto não tende para zero, á medida que o numero de termos fôr crescendo.

Nunca se deve fazer uso de séries sem que representem com tanta approximação quanta se desejar, o valor da quantidade por ellas expresso; e para esse fim, supposto um numero de termos infinito, torna-se indispensavel que a somma dos n primeiros termos convirja para um limite determinado, tanto mais, quanto maior fôr n. As sommas successivas assim obtidas devem differir cada vez menos.

Na série: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ designando por: S_n, S_{n+1}, ... S_{n+p} as sommas successivas; a differença $S_{n+1} - S_n = n_{n+1}$ deverá ser tanto menor, quanto maior fôr n, isto é, *os termos decrescentes;* da mesma maneira $S_{n+p} - S_n$ deverá tornar-se menor do que qualquer quantidade designada, por mais pequena que seja. As séries que satisfazem a esta condição são *convergentes*, e só ellas podem representar uma quantidade. As progressões geometricas cuja razão fôr menor que a unidade teem um limite determinado e podem constituir um typo de confronto excellente para decidirmos da convergencia de uma série apresentada.

Em qualquer progressão arithmetica, ou geometrica, de razão maior que a unidade, a somma de n termos cresce com n além de todo o limite; todas as séries, n'este caso, são *divergentes*. Ha tambem sommas de termos que não teem um limite determinado, como: $1 - 1 + 1 - 1 \ldots;$

A série harmonica: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots;$ que se pode apresentar como uma somma de parcellas, em numero infinito, todas maiores que $\frac{1}{2}$ e, portanto, divergente, mostra bem que, para criterio de convergencia, não basta que os termos vão decrescendo.

Satisfeita a condição de serem decrescentes os termos e de $S_{n+p} - S_n < \varepsilon$, sendo esta quantidade tão pequena, quanto se queira, as principaes regras para a convergencia veem a ser:

1.º O confronto com uma progressão geometrica, que é das séries mais simples e de propriedades bem conhecidas. Se a progressão fôr decrescente e a série proposta tiver uma somma menor, em egualdade de termos, está assegurada a convergencia. Sendo a progressão crescente e a somma dos n primeiros dos seus termos menor que a do mesmo numero dos primeiros da segunda, esta é divergente.

2.º Quando os termos são alternadamente positivos e negativos, tomando a somma dos n primeiros pelo valor da série, o resto é:

$$\pm a \mp b \pm c \mp d \pm e \mp f \ldots$$

o que se pode escrever:

$$\pm \left[(a\text{-}b) + (c\text{-}d) + (e\text{-}f) + \ldots \right]$$

ou:

$$\pm \left[a - (b\text{-}c) - (d\text{-}e) \ldots \right]$$

Como os termos da série são decrescentes, cada um será maior que o seguinte e positivas as differenças: a-b, c-d...; portanto, todos os parentheses incluidos nas duas chavetas representam quantidades positivas. Dentro da primeira chaveta figura uma somma de quantidades todas positivas; será tambem positiva esta somma e o signal do resto $+$, ou $-$, conforme *a*, primeiro termo do resto, fôr positivo, ou negativo. A segunda chaveta mostra que o resto é menor que *a*.

N'este caso, pois, *o resto é menor e do mesmo signal que o primeiro termo desprezado.*

3.º Ha convergencia, quando a relação variavel de cada termo para o antecedente tende para um limite: $L < 1$, e divergencia, se $L > 1$. No primeiro caso, além de certo ponto, aquella relação será constantemente menor, que uma quantidade *q*, comprehendida entre L e 1, vindo assim:

$$b < a.q\,;\ c < b.q\,;\ d < c.q \ldots;$$

ou:

$$c < aq^2\,;\ d < aq^3\,;\ e < aq^4 \ldots$$

e:

$$(a + b + c + d \ldots) < a\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

como: $q < 1$, a série do parenthese, progressão geometrica, é convergente, sel-o-ha, portanto, com mais razão o primeiro membro da desegualdade, bem como a série proposta.

Se o limite L fôsse maior que 1, tomariamos uma quantidade q, tal que: $L > q > 1$, inverter-se-hiam os signaes de todas as desegualdades, e reconheceriamos que a série era divergente.

Se a relação de cada termo para o antecedente tiver por limite a unidade, posta sob a forma: $\dfrac{1}{1+\varphi}$, sendo φ positivo e tendendo para zero, á medida que n crescer, pode demonstrar-se que a série é convergente, se $n \varphi > 1$, e divergente no caso contrário.

II. Resolução das equações numericas

6. Resolver uma equação, $F(x) = 0$, é, como se sabe, determinar os valores de x, denominados *raizes*, que, substituidos a esta incognita, annullem a funcção. Traçando n'um plano dois eixos coordenados orthogonaes, como indica a figura I, tomando por abscissas aquelles valores e os da funcção por ordenadas, resulta a curva, logar geometrico da equação $y = F(x)$, e raizes serão valores da abscissa, taes como: Oa, Ob, Oc... por isso que nos pontos a, b, c... extremos dos respectivos segmentos se annulla o valor de y, ou da funcção. Só as raizes reaes podem, porém, ser obtidas de tal modo, mas só d'estas nos occupamos, visto que os valores das incognitas — da taxa nos cálculos financeiros, que geralmente temos a procurar — nunca podem ser imaginarios.

A curva, logar geometrico de qualquer equação, a que formos levados n'um cálculo financeiro, deve, pois, ser cortada pelo eixo, em que se tomarem os valores da incognita. A não ser conica, forçoso é obtel-a por pontos, e pequeno numero d'estes é preciso para darem ao espirito o sentimento de continuidade da linha. Podiamos, para obter valores approximados das raizes, empregar simplesmente o processo graphico, tão combatido a principio e tão preconisado hoje, do qual diz o sr. Laisant: — *abrège le langage, parle nettement à l'esprit et... fournit les éléments pour établir ensuite une démonstration purement algébrique, si on le préfére.* Este processo, exclusivamente empregado, tem comtudo o inconveniente de não determinar bem o gráu de approximação dos resultados; dispensavel em vários casos, para os quaes basta o simples conhecimento de algumas propriedades das equações, é n'outros um auxiliar valioso, combinando-o com o processo analytico.

Nos pontos a, b, c... a curva dirige-se de um quadrante inferior para outro superior, ou vice-versa. No primeiro caso, á esquerda do ponto, as ordenadas serão negativas até uma certa distancia, e, á direita d'elle, positivas; é o que se dá em *a* e *c*. A' esquerda de *b*, são, pelo contrário, positivas, adquirindo valores negativos á direita d'este ponto.

Na transição de uns para outros d'esses valores a ordenada annulla-se nos pontos correspondentes ás raizes; é o que se deduz do principio de continuidade, em virtude do qual nenhuma funcção pode passar de um valor a outro, mantendo uma differença finita com o primeiro, sem ter percorrido todos os intermediarios, quando a sua variavel independente percorre toda a escala de valores, que separam os dois extremos, correspondentes aos da funcção. Quando esta estiver representada por uma curva é contínua, como precedentemente ficou dicto ao tratar das funcções, n.º 3.

De uma maneira geral, pode dizer-se:

Se a dois valores da incognita corresponderem valores da funcção, de signaes contrários, esta annulla-se para um valor intermediario áquelles, o qual será uma raiz de $F(x) = o$.

Dos valores reaes da incognita que satisfazem a esta equação, uns podem ser obtidos directamente e são os das raizes commensuraveis, inteiras, ou fraccionárias; outros, recorrendo ao criterio, assignalado no principio anterior, pelo qual se obteem limites, entre os quaes deve ser comprehendido o valor de cada uma das raizes incommensuraveis, limites que, pelos processos adeante descriptos, se vão approximando até se conseguir para o numero desejado tantas casas decimaes, quantas as requeridas.

7. Alguns principios em que se baseia a determinação das raizes das equações. — Foi demonstrado por Argand e Mourey, e mais tarde por Cauchy, que toda a equação admitte uma raiz, e se esta fôr representada por *a*, será, portanto, nullo o resultado da substituição da incognita por este valor na equação proposta. Sabe-se pela algebra elementar, que o resto da divisão por $x - a$, de um polynomio F (x), é o que resulta substituindo n'elle x por a, ou: F (a). O resto vem, pois, nullo, quando *a* é raiz, e, como consequencia immediata, esse polynomio é divisivel por x — a. Podemos escrever: $F(x) = (x - a) f(x)$.

O quociente, funcção de *x*, de gráu inferior em uma unidade ao do dividendo, pode egualmente decompôr-se em factores, porquanto a equação $f(x) = o$ deve tambem admittir uma raiz, e designando-a por b resultará: $f(x) = (x - b)\ \varphi(x)$, e, proseguindo assim até se chegar a um quociente de primeiro gráu, vem:

$$F(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots (x - m).$$

sendo os segundos termos dos parentheses, formados pelas raizes, tomadas com signaes contrários e o coefficiente A o do primeiro termo da equação, o qual apparece em todos os quocientes affectando o termo em que entra a maior das potencias da incognita.

D'aqui derivam os seguintes principios:

— Uma equação admitte tantas raizes, quantas são as unidades do expoente — o seu primeiro membro é o producto de egual numero de factores binomios, formados pelas respectivas differenças entre a incognita e essas raizes — os coefficientes dos diversos termos do desenvolvimento serão os productos por A de: a somma das raizes, tomadas com signaes contrários, no segundo termo; a somma dos productos d'ellas, tomadas duas a duas, no terceiro termo; a somma dos productos, tomadas: $i - 1$ a $i - 1$, no termo de ordem i, e, finalmente, o producto de todas no ultimo termo; sendo os signaes dos productos, positivos, ou negativos, conforme o numero de factores fôr par, ou impar.

— As raizes reaes a, b, c... estando dispostas por ordem crescente de grandeza, vê-se que, dando á incognita valores successivamente crescentes, a funcção irá variando sempre no mesmo sentido, crescendo, ou decrescendo, até o valor a de x em que se annulla; d'alli em deante, cortado o eixo das abscissas, a funcção muda de signal e vae variando até um ponto, em que adquire um maximo, ou minimo, correspondente a uma raiz da derivada, porque nos maximos e minimos esta se annulla, como já se viu na primeira parte. Passado esse ponto, ella vae decrescendo no primeiro caso e crescendo no segundo, até ser cortado o eixo no ponto correspondente á raiz b, e assim successivamente, mudando sempre de signal em cada uma d'essas passagens.

Qualquer valor da abscissa, menor que a, produz para a funcção um outro do mesmo signal, ou contrário ao de A, segundo o gráu da equação fôr par, ou impar; o mesmo succede, quando houver um numero par de raizes, menores que esse valor da incognita. Acima da maxima raiz a funcção conservará sempre o signal de A, o qual podemos reputar como positivo, e para valores da incognita, maiores que a unidade, as potencias d'ella crescerão com os expoentes e tanto, que, acima de um valor determinado para cada equação, mas variavel de uma para outra, o termo da mais alta potencia sobrepuja não só cada um dos outros, mas ainda a sua somma.

Ao tratar de raizes fraccionárias, veremos como se pode fazer desapparecer o coefficiente A do primeiro termo da equação.

Quando a funcção varia n'uma raiz, muda de signal; na raiz seguinte dá-se nova mudança, restabelecendo-se, portanto, o primitivo signal; na seguinte repete-se o que se tinha dado com a primeira, e assim successivamente, de sorte que entre dois valores da funcção, ambos do mesmo signal, ha sempre um numero impar de raizes, quando existirem raizes reaes entre elles. Do mesmo modo se reconhece, que entre dois valores da funcção, de signaes contrários, se existirem raizes reaes, estas serão em numero par.

O que se nota na figura II com as raizes Oa, Ob, Oc, torna bem saliente e, ao mesmo tempo, grava bem no espirito este facto.

8. Se M, N, P fôrem quantidades commensuraveis, inteiras ou fraccionárias, positivas ou negativas, e $\sqrt{N}$ incommensuravel, ou imaginario, pode estabelecer-se a proposição seguinte:

«Se uma equação algebrica, de coefficientes reaes, admittir uma raiz da forma $M + P\sqrt{N}$, deve admittir uma outra da forma $M - P\sqrt{N}$.

Em consequencia da hypothese estabelecida, F (x) é exactamente divisivel por $(x - M - P\sqrt{N})$ e o quociente, seja qual fôr, ha de compôr-se de duas partes: uma commensuravel, designada por X, outra incommensuravel, representada por $Y\sqrt{N}$, sendo X e Y, em geral, funcções da incognita.

Pode escrever-se :

$$F(x) = (x - M - P\sqrt{N})(X \pm Y\sqrt{N})$$

ou :

$$F(x) = (x - M)Z \pm PY(\sqrt{N})^2 + [\pm(x - M)Y - PX]\sqrt{N}$$

e, como na equação proposta não ha termos incommensuraveis, ou imaginarios, deve ser nullo o coefficiente do radical na ultima equação, do que resulta :

$$F(x) = (x - M)Z \pm YP(\sqrt{N})^2$$

Mudando simultaneamente os signaes de P e de Y, esta equação não muda ; subsistirá ainda a primeira equação, feitas n'ella essas transformações, porquanto ambas ellas não representam mais do que formas diversas da mesma quantidade, que é a funcção. Será tambem :

$$F(x) = (x - M + P\sqrt{N})(X \mp Y\sqrt{N})$$

e, assim, fica demonstrado que haverá outra raiz : $M - P\sqrt{N}$.

As raizes incommensuraveis, ou imaginárias, a que se applica este principio, entram, portanto, n'uma equação, grupadas duas a duas, dizendo-se *conjugadas* as de cada grupo, cuja somma é sempre commensuravel, visto que pela addição desapparecem os incommensuraveis e os imaginarios. Assim, se $2 + 5\sqrt{3}$ fôr uma raiz, tambem o será $2 - 5\sqrt{3}$; da mesma sorte, se $1 + 2\sqrt{-1}$ fôr uma das raizes, na equação entra ainda: $1 - 2\sqrt{-1}$. P pode ser egual á unidade, sendo tambem admissiveis os grupos :

$$2 \pm \sqrt{3} \text{ e } 5 \pm \sqrt{-1}.$$

Na equação de quarto gráu:

$$132{:}300\,x^4 - 170{:}100\,x^3 + 31{:}827\,x^2 - 67{:}398\,x - 19{:}409 = 0$$

raizes são:

$$\frac{1}{7} \pm \frac{4}{5}\sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ e } \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{-1}$$

Na equação de quarto gráu:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$$

as raizes, egualmente formando dois grupos, são:

$$1 \pm \sqrt{2};\ 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Não podendo existir as raizes imaginárias senão em numero par, conclue-se d'aqui, que as equações de gráu impar devem admittir pelo menos uma raiz real; o mesmo se diz das raizes incommensuraveis, e por isso as equações de gráu impar devem ter uma raiz real e commensuravel.

9. O numero de raizes reaes, se as houver, será par, ou impar, segundo o gráu da equação fôr par, ou impar.

10. Regra de Descartes. — Quando os signaes de dois termos consecutivos são eguaes, diz-se que ha uma *permanencia;* no caso contrário uma *variação.* Introduzindo na equação uma raiz nova: r, temos de multiplicar o primeiro membro por $x - r$, e facilmente se reconhece que no producto ha pelo menos, em relação ao multiplicando, uma nova variação, e que as variações introduzidas por r, que supporemos positivo, são sempre em numero impar; d'onde se deduz:

N'uma equação qualquer, o numero das raizes positivas não pode exceder o das variações, e, quando é menor, a differença é sempre um numero par.

As raizes negativas da proposta serão as positivas da transformada, resultante de se mudar o signal da incognita substituindo x por $-x$ e d'ahi:

O numero de raizes negativas não pode exceder o das variações da transformada, que se obtem mudando x em $-x$, e, quando é menor, a differença é um numero par.

A equação $x^7-4x^3+5x^2+9x-7=0$, tem tres variações, por isso não pode admittir mais de tres raizes positivas, e, ou ha de ter tres, ou uma. Mudando n'ella o signal da incognita, vem: $-x^7+4x^3+5x^2+9x-7=0$, em que ha duas variações, devendo as raizes negativas ser duas.

Este principio é de um valioso recurso na pesquisa das raizes reaes, de que temos de nos occupar.

11. Conhecida que seja uma raiz r, podemos abaixar o gráu da equação, cujo primeiro membro é multiplo de $x-r$, dividindo-o por este binomio. Se mais de uma raiz fôr conhecida, feita a divisão pelo producto dos respectivos binomios, abaixar-se-ha o gráu de tantas unidades, quantos fôrem estes.

12. Raizes da unidade. — Posto que não seja nosso proposito o estudo das raizes imaginárias, convém, todavia, saber que a equação $x^m-1=0$, admittindo m raizes, só uma d'ellas é real, quando o expoente fôr impar: $+1$; havendo uma unica variação, correspondente aos valores positivos da incognita. Representando m por $2k+1$, as raizes para o caso de expoente impar serão dadas pela fórmula:

$$\cos\frac{2n\pi}{2k+1}\pm\sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\frac{2n\pi}{2k+1}$$

Quando o expoente é par, ha uma variação para os valores positivos da incognita e outra para os negativos; duas raizes reaes: ± 1 e a totalidade das raizes, fazendo $m=2k$:

$$\cos\frac{n\pi}{k}\pm\sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\frac{n\pi}{k}$$

Na equação $x^m+1=0$ só ha a raiz real: -1, quando m fôr impar e as raizes são todas obtidas pela fórmula:

$$\cos \frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen} . \frac{(2n+1)\pi}{m}$$

N'estas fórmulas dar-se ha a *n* valores positivos, a partir de zero, até resultarem *m* valores differentes para a expressão.

13. Raizes reciprocas.—Visto que o producto de dois numeros reciprocos é a unidade, designando por *z* a sua somma, serão ambos as raizes da equação do segundo gráu:

$$x^2 - z\,x + 1 = 0$$

de sorte que:

$$\frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - 1}$$

é a expressão que dá os valores de todos os numeros reciprocos em funcção da somma.

14. Raizes eguaes. — Se n'uma equação houver *n* raizes eguaes a *a*, o seu primeiro membro admitte como factor a potencia *n* do binomio $x - a$; a primeira derivada compõe-se de *m* parcellas (sendo *m* o gráu de equação) e cada uma d'ellas admitte como factor a potencia $n - 1$ do binomio; nas derivadas seguintes os termos serão multiplos de uma potencia, cujo expoente é $n - i$, sendo *i*, o numero da derivada.

A raiz não pertence, pois, só á equação, mas a todas que resultam, egualando a zero as derivadas successivas até á ordem $n - i$, inclusivamente.

15. Construir uma equação dadas as raizes.—Conhecido o modo por que é constituido o polynomio F (x), facilmente podemos construir uma equação de qualquer gráu, admittindo raizes conhecidas; basta para esse fim multiplicar os binomios: $x - a$, $x - b$... sendo: a, b, c... as raizes. Se ellas forem, por exemplo, $2 \pm \sqrt{3}$; $1 \pm \sqrt{-1}$,5, resultará a equação:

$$F(x) = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{-1})$$

$$(x-1+\sqrt{-1})(x-5) = 0$$

$$= [(x-2)^2 - 3][(x-1)^2+1](x-5) = 0$$

$$= x^5 - 11x^4 + 41x^3 - 65x^2 + 52x - 10 = 0$$

Facilmente se vê como se deve proceder em qualquer caso.

16. Podemos reconhecer pela construcção graphica a influencia do ultimo termo no numero, valores e disposição das raizes. Seja, por exemplo, a equação:

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

cujas raizes são: 1, 2 e 3. Faça-se: $y = F(x)$ e, referida a dois eixos coordenados orthogonaes, construa-se a curva, logar geometrico da equação, que é a indicada pela Fig. III.

O eixo das abscissas corta a curva nos pontos, respectivamente designados por 1, 2, 3, correspondentes áquellas raizes. Levantando o eixo, fazendo-o mover parallelamente a si mesmo, isto é, mudando y em $y+h$, sendo h a altura variavel a que se vae elevando, a cada uma das suas diversas posições deve corresponder uma equação, distincta das outras, a qual se obtem diminuindo de h o ultimo termo da proposta.

Se pensarmos na disposição, apresentada pela figura, veremos que ha tres raizes reaes, emquanto o eixo movel não fôr tangente á curva, caso em que duas das raizes são eguaes; d'esse ponto em deante só ha uma raiz real, sendo imaginárias as outras duas. A resolução da equação, que se obtem em cada uma das posições do eixo movel, equivale a determinar as abscissas dos pontos de intersecção da curva com uma recta, parallela ao eixo movel, tendo por equação: $y = h$.

Quando este eixo, pelo contrário, descer, conservando-se sempre parallelo á primitiva direcção, y transformar-se-ha em: $y - h$; devemos, pois, augmentar de h o primeiro membro da equação. A origem ficará sobre a curva se o abaixarmos de $h = 6$. Até o ponto de tangencia, como anteriormente, ha tres raizes reaes; n'esse ponto duas d'estas eguaes, e, d'alli por deante, só uma real. As raizes serão as abscissas das intersecções da curva, quando reaes, com a recta: $y = -h$.

17. Raizes conjugadas em geral. — No n.º 8 foi demonstrada a existencia de duas raizes conjugadas, que pertencem a uma equação de segundo gráu, de coefficientes inteiros; supponhamos, agora que, n'uma d'essas equações ha a seguinte raiz: $M + P\sqrt{N} + Q\sqrt{R} + \ldots$; admittindo um numero n de radicaes e sendo todas as quantidades, quer situadas debaixo d'elles quer fora, commensuraveis' será:

$$F(x) = (x - M - P\sqrt{N} - Q\sqrt{R} - \ldots)$$
$$\times (X + Y\sqrt{N} + Z\sqrt{R} + W\sqrt{NR} + \ldots)$$

ou:

$$F(x) = (x - M)X - PYN - QZR \ldots$$
$$+ f[\sqrt{N}, \sqrt{R}, \ldots \sqrt{NR} \ldots]$$

em que: $X, Y, Z, W \ldots$ são funcções de x.

O segundo membro da equação compõe-se de duas partes, uma commensuravel e outra incommensuravel, devendo esta ser nulla; e visto que o primeiro membro é commensuravel, resulta o seguinte:

$$F(x) = (x - M)X + PYN + QZR + \ldots;$$

Mudando os signaes de P e Y, ou de Q e Z...; a equação não soffre nenhuma mudança, mesmo no caso em que sejam trocados os signaes a todas estas quantidades, o que mostra, evidentemente, que da mesma sorte serão raizes:

$$M - P\sqrt{N} + Q\sqrt{R} \ldots; \quad M + P\sqrt{N} - Q\sqrt{R} \ldots;$$
$$M - P\sqrt{N} - Q\sqrt{R} \ldots; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Todas estas raizes, que constituem um grupo e pertencem simultaneamente á mesma equação, se dizem *conjugadas*; o seu numero, suppondo que em cada uma d'ellas existem n radicaes, é calculado pelas considerações seguintes: é dada uma primeira raiz, e d'ella se deduzem todas as outras, mudando successivamente o signal a cada um dos n termos que conteem radicaes, obtemos assim n raizes, além da primeira; forma-se um novo sub-grupo mudando na primeira o signal a dois termos de cada vez e obteremos assim tantas raizes a mais, quantas forem as combinações distinctas de n objectos, tomados dois a dois — mudando os signaes a tres termos de cada vez forma-se outro sub-grupo, cujo numero é o das combinações distinctas de n objectos, tomados tres a tres, e assim successivamente até se obter a ultima, que resulta da primeira pela troca simultanea de signaes em todos os termos. Representando por V o numero d'estas raizes e por C_n^i o numero de combinações distinctas de n objectos, tomados i a i, será:

$$V = 1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

d'onde:

$$V = 2, 4, 8, \ldots;$$

Do exposto resulta o seguinte principio:
«Para que uma equação admitta uma raiz:

$$M + P\sqrt{N} + Q\sqrt{R} \ldots$$

em que todas as lettras representam quantidades commensuraveis, com um numero n de radicaes, é necessario que seja, pelo menos, 2^n o seu gráu.»

As raizes conjugadas dizem-se, portanto, do segundo gráu, do quarto, do oitavo, etc.

Com o grupo do quarto gráu:

$$1+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}\,;\,1-2\sqrt{3}+5\sqrt{7}\,;\,1+2\sqrt{3}-5\sqrt{7}\,;$$
$$1-2\sqrt{3}-5\sqrt{7}$$

forma-se a equação:

$$x^4 - 4x^3 - 368x^2 + 744x + 26:196 = 0$$

Com o grupo, tambem do quarto gráu:

$$1 + \sqrt{-1} + \sqrt{-2}\,;\; 1 - \sqrt{-1} + \sqrt{-2}\,;$$
$$1 + \sqrt{-1} - \sqrt{-2}\,;\; 1 - \sqrt{-1} - \sqrt{-2}$$

forma-se a seguinte equação:

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 8 = 0$$

Designando por v o termo da raiz independente de radical, e os outros por a, b, c; com as raizes:

$$v + a + b + c;\; v - a + b + c;\; v + a - b + c;$$
$$v + a + b - c;\; v - a - b + c;\; v - a + b - c;$$
$$v + a - b - c;\; v - a - b - c$$

obtem-se a equação de oitavo gráu:

$$(x-v)^8 - 4(a^2+b^2+c^2)(x-v)^6 + 2[(a^2+b^2+c^2)^2 + 2(a^4+b^4+c^4)](x-v)^4 - 2[a^2b^2 \times (a^2+b^2) + a^2c^2(a^2+c^2) + b^2c^2(b^2+c^2) + 6a^2b^2c^2 + a^6 + b^6 + c^6](x-v)^2 + a^8 + b^8 + c^8 - 4[a^6(b^2+c^2) + b^6(a^2+c^2) + c^6(a^2+b^2)] + 6[a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4] + 4a^2b^2c^2 \times (a^2+b^2+c^2) = 0$$

cujos termos se acham desembaraçados dos radicaes.

Continuando a representar por v a parte commensuravel commum a todas as raizes, e fazendo: $x - v = y$, ou $x = y + v$ reconhece-se que na nova equação, transformada da primeira, metade das raizes é egual e de signal contrário a outra metade. Designando, com effeito, por: r, r', r''. , respectivamente, as sommas dos termos que conteem radicaes em cada raiz, serão na transformada as raizes em numero par: 2^n, dispostas do seguinte modo: $+r, -r; +r', -r', \ldots$; no polynomio F (x), os factores, cujo producto elle representa, podem-se escrever:

$$(y-r)(y+r)(y-r')(y+r')(y-r'')(y+r'')\ldots;$$

ou:

$$F(x) = (y^2 - r^2)(y^2 - r'^2)(y^2 - r''^2)\ldots;$$

A hypothese: $x = v + y$ produz, pois, uma equação que não contém mais do que as potencias pares da incognita, a qual se reduz a uma outra de gráu metade do da primeira suppondo que apenas ha raizes conjugadas. D'ahi o principio:

Quando uma equação não admitte mais do que raizes conjugadas, pode reduzir-se a uma outra de gráu metade do que tinha.

Dada, por conseguinte, uma equação:

$$x^m + A x^{m-1} + \ldots ; = o$$

se admittir apenas raizes conjugadas, sendo $m = 2^n$, podemos determinar facilmente qual o valor da parte commensuravel, commum a todas as raizes, visto que, fazendo: $x = y + v$, resulta:

$$y^m + (m v + A) y^{m-1} \ldots\ldots ; = o$$

e como na transformada não devem existir potencias impares da incognita, segue-se que:

$$m v + A = o \text{ e } v = -\frac{A}{m}$$

Para haver só raizes conjugadas devem annullar-se os coefficientes de todas as potencias impares da transformada, e por isso o valor de v, assim achado, deve não só satisfazer áquella equação, mas a todas as que proveem do facto de se annullarem esses coefficientes. A equação immediata e que deve ser satisfeita por esse valor é:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} v^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} v^2 A + (m-2) v B + C = 0$$

Se uma equação fôr de gráu $2^n + 1$, admittindo uma unica raiz commensuravel e sendo as outras conjugadas, a resolução d'ella depende da resolução de um systema, formado por uma equação de primeiro gráu e outra de terceiro, além da de uma equação de gráu 2^{n-1}, não pertencente ao systema.

Seja a equação:

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \ldots\ldots ; = o$$

se u fôr a raiz commensuravel, dividindo por $x - u$, vem:

$$x^{m-1} + (A + u)\, x^{m-2} + (B + A u + u^2)\, x^{m-3} + (C + B u + A u^2 + u^3)\, x^{m-4} + \ldots = o$$

continuando a representar por v a parte commensuravel, commum ás raizes conjugadas, e mudando x em y + v, vem:

$$y^{m-1} + \left.\begin{matrix} (m-1)\, v \\ + A + u \end{matrix}\right| y^{m-2} + \left.\begin{matrix} \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} v^2 \\ + (m-2)(A+u)\, v \\ + B + A u + u^2 \end{matrix}\right| y^{m-3}$$

$$\left.\begin{matrix} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} v^3 \\ + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} (A + u)\, v^2 \\ + (m-3)(B + A u + u^2)\, v \\ + C + B u + A u^2 + u^3 \end{matrix}\right| y^{m-4} \ldots = O$$

e como devem desapparecer os termos de expoentes impares, (aqui, visto ser $m = 2^n + 1$, são os termos de expoentes: $m - 2$, $m - 4 \ldots$) resultará o systema:

$$(m-1)\, v + A + u = o$$

$$\left[\begin{matrix} \frac{(m-1)(m-2)\, m-3)}{1.\ 2.\ 3} v^3 + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2} \times \\ (A + u)\, v^2 + (m-3)(B + A u + u^2)\, v + c + B u \\ + A u^2 + u^3 = O \end{matrix}\right.$$

Calculados u e v por este meio, a equação baixa logo pelo conhecimento de u ao gráu 2^n e pelo de v reduz-se este gráu a metade, isto é, a 2^{n-1} como está demonstrado para as raizes conjugadas.

Facilmente se vê do que fica dependente a resolução de uma equação, admittindo 2^n raizes conjugadas e mais um certo numero d'ellas, não pertencente a este grupo; mas a resolução, dependente da de equações de gráus mais elevados, é em geral impossivel pelos meios algebricos.

Todas as equações de gráu par podem ser formadas exclusivamente pelo producto de binomios em que só entram raizes conjugadas. Ja sabiamos como se poderiam constituir recorrendo apenas ás raizes conjugadas de segundo gráu; mas, quando a equação o permitta, podem combinar-se estas com as dos outros gráus. Assim, por exemplo, duas conjugadas do segundo e quatro do quarto, podem dar uma equação do sexto. A equação do oitavo gráu pode comportar quatro grupos conjugados do segundo, ou dois do quarto, ou um do quarto e dois do segundo, ou um do oitavo.

Nos gráus pares mais elevados, maior numero de combinações se podem fazer.

Mudando x em $y + v$ nas equações anteriores vem, para:

$$x^4 - 4x^3 - 368x^2 + 744x + 26196 = 0$$

a transformada:

$$y^4 + 4(v-1)y^3 + (6v^2 - 12v - 368)y^2 + (4v^3 - 12v^2 - 736v + 744)y + v^4 - 4v^3 - 368v^2 + 744v + 26{:}196 = 0$$

devendo annullar-se os coefficientes das potencias impares:

$$v - 1 = 0;\ 4v^3 - 12v^2 - 736v + 744 = 0$$

o valor 1 para *v*, deduzido da primeira satisfaz á segunda, e obtida a parte commensuravel das raizes conjugadas, substituindo *v*, por 1 na transformada, vem:

$$y^4 - 374y^2 + 26569 = 0$$

d'onde:

$$y = \pm\sqrt{187 \pm \sqrt{187^2 - 26{:}569}} =$$

$$\pm\left\{5\sqrt{7} \pm \sqrt{3}\right\}$$

e para as raizes da equação proposta :

$$1+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}\,;1-2\sqrt{3}+5\sqrt{7}\,;$$

$$1+2\sqrt{3}-5\sqrt{7}\,;1-2\sqrt{3}-5\sqrt{7}$$

valores, de que tinhamos partido para construir a equação.

Seja ainda o exemplo :

$$x^4-4\,x^3+12\,x-16\,x+8=0$$

mudando x em $y+v$ resulta :

$$\begin{aligned} y^4+4\,(v-1)\,y^3&+(6\,v^2-12\,v+12)\,y^2\\ &+(4\,v^3-12\,v^2+24\,v-16)\,y\\ &+v^4-4\,v^3+12\,v^2-16\,v+8=0\end{aligned}$$

Annullando os coefficientes das potencias impares, obtem-se :

$$v-1=0\,;\,4\,v^3-12\,v^2+24\,v-16=0$$

o valor 1 de v satisfaz ás duas equações e por isso pode-se escrever a transformada :

$$y^4+6\,y^2+1=0$$

d'onde :

$$y=\pm\sqrt{-3\pm\sqrt{3^2-1}}=\pm\left\{\sqrt{-1}\pm\sqrt{-2}\right\}$$

e as raizes da equação proposta vem a ser :

$$1+\sqrt{-1}+\sqrt{-2}\,;1-1\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$$

$$1-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}\,;1-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}$$

Nos exemplos anteriores, os radicaes ou recáem sobre quantidades positivas, na mesma raiz, ou sobre negativas; mas facil é de vêr, não só que a theoria não estabelece esta distincção, admittindo a promiscuidade d'aquellas quantidades nas parcellas da somma representativa do valor de qualquer raiz, como tambem que a prática demonstra a veracidade da proposição, quer haja, ou não haja, essa promiscuidade.

Processos indirectos para obter as raizes

18. Está demonstrado que, a não ser em casos excepcionaes, é impossivel a resolução algebrica das equações, além do quarto gráu, não podendo as raizes ser expressas em funcção dos coefficientes, recorrendo apenas ás operações indicadas pelos signaes algebricos : $+, -, \times, :, \sqrt{\ }$.

Mostrou o sr. Hermite, como poderia ser resolvida directamente a equação de quinto gráu pelas funcções ellipticas, que transcendem o dominio da algebra ; este recurso foi ainda empregado por outros mathematicos e para equações de gráus diversos.

Pelo que respeita ás equações de terceiro gráu, as fórmulas de Cardan apresentam no caso irreductivel, em que só ha raizes reaes, os valores d'estas expressos por meio de imaginarios, cuja desapparição tem sido tentada pelo emprêgo de séries, geralmente pouco convergentes; procurou-se ainda obter as raizes recorrendo ás funcções circulares; mas esta resolução trigonometrica está longe do *desideratum* de exprimir as raizes por meio dos coefficientes, não empregando senão os signaes algebricos. Dependendo da resolução da do terceiro, a equação do quarto gráu, em consequencia de ser a sua reduzida de terceiro gráu, vê-se que só ha realmente uma resolução directa, livre de difficuldades insuperaveis, para todos os casos que se possam apresentar nas equações dos dois primeiros gráus.

O tão célebre como celebrado problema da trisecção do angulo, que nos legaram os geometras gregos, tido hoje por impossivel á fôrça de zombar dos esforços de centenas de gerações, demonstra exuberantemente que a partir das equações de terceiro gráu, o dominio da algebra vae-se tornando cada vez mais restricto.

19. As raizes distinguem-se em : reaes e imaginárias, e as primeiras, que são as que mais particularmente nos interessam, admittem a divisão em: commensuraveis e incommensuraveis, podendo ainda as commensuraveis ser inteiras, ou fraccionárias.

20. Como temos de recorrer a tentativas, é muitas vezes necessario substituir a incognita por diversos numeros, e, para esse fim, tem sido alvitrado o seguinte processo, de commodo emprêgo, quando as equações não tenham o gráu muito elevado, nem admittam grandes lacunas.

Sejam $A, B, C, D \ldots$ os coefficientes dos diversos termos successivos, a começar no primeiro e dispostos, como de costume, pela ordem das potencias decrescentes da incognita, e a, o numero a substituir; faz-se o producto: Aa e, ajuntando-se-lhe B, multiplique-se a somma resultante por a, vem $(Aa + B)a$; ajunte-se C ao resultado e multiplique-se por a a somma obtida, achar-se-ha: $[(Aa + Ba) + C]a$, depois ajuntar-se-hia ao numero, assim calculado, o coefficiente seguinte: D, tornando a fazer a multiplicação por a, e, ao cabo de uma série de operações que abranjam todos os coefficientes e terminem pela addição do ultimo, vem um numero, que é o valor de $y = F(x)$, quando á incognita se arbitra o valor a.

Em diversos cálculos financeiros para equações de um pequenissimo numero de termos e expoentes da incognita, taes como: 100, 200, ou 300, chegando por vezes a ser mais elevados ainda, é inadmissivel o processo, tendo de se empregar, como havemos de ver, o cálculo de logarithmos, prèviamente obtidos com o numero de decimaes necessario, para que os erros fiquem restrictos aos limites em cada caso assignados.

a) *Raizes inteiras*

21. Como estas raizes devem ser divisores do ultimo termo, está naturalmente indicado o caminho a seguir: decompôr esse termo em factores e ensaial-os methodicamente, attendendo a que, por poderem ser as raizes positivas, ou negativas, devemos organisar uma lista, tanto dos factores positivos, como dos negativos.

O primeiro cuidado, sempre que se tratar de resolver uma equação, é o do emprêgo da regra de Descartes, porque se esta nos disser que não ha nenhuma raiz real, positiva, ou negativa, inutil se torna o fazer uma tal pesquisa.

No caso affirmativo, devemos verificar se $(+1)$ e (-1) são raizes, o que se faz rapidamente, e, quando qualquer d'estes numeros ou ambos forem raizes, procede-se ao abaixamento do gráu da equação, como se disse no n.º 11. Obteremos, assim, os valores de $F(+1)$ e de $F(-1)$, e supponhamos que nenhum d'estes numeros ensaiados é raiz, porque, se o fôr, faz-se o abaixamento do gráu e um novo ensaio com os mesmos numeros, sendo preciso repete-se a operação até que se verifique que nenhum d'elles já pode ser admittido; d'esta sorte os valores das duas funcções devem ser differentes de zero. Posto isto, supponhamos que se trata agora de saber, se um dado numero a, divisor do ultimo termo, pode satisfazer á equação.

Se a fôr uma das raizes, será $F(x)$ divisivel por $x - a$ e sendo Q um polynomio inteiro : $F(x) = (x - a)\,Q$, d'onde : $F(+1) = (1 - a)\,Q$; $F(-1) = (-1 - a)\,Q$, portanto, quando $a > 0$, será $F(+1)$ divisivel por $1 - a$, ou $a - 1$ e $F(-1)$ por $a + 1$.

Sendo $a < 0$, $F(+1)$ será divisivel por $a + 1$ e $F(-1)$ por $a - 1$.

Nas quantidades: $a - 1$ e $a + 1$, considera-se a com o valor positivo.

Portanto:

$$a > 0 \begin{cases} F(+1) \text{ por } a - 1 \\ F(-1) \quad \text{»} \quad a + 1 \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} F(+1) \text{ por } a + 1 \\ F(-1) \quad \text{»} \quad a - 1 \end{cases}$$

D'aqui se deduz, como regra a empregar, afim de se evitarem tentativas morosas e inuteis, que, depois de eliminadas as raizes: $+1$ e -1, se as houver, e abaixado o gráu da equação, ou na propria equação primitiva, quando taes raizes não existam, devemos substituir á incognita aquelles valores, e obtidos os correspondentes para a funcção, ensaiar a divisibilidade de $F(+1)$ e $F(-1)$ pelos factores do ultimo termo, respectivamente diminuidos, ou augmentados, de uma unidade. Nenhum dos divisores pode ser raiz, sem que, assim diminuido, ou augmentado, de uma unidade, deixe de dividir os valores indicados para a funcção; mas, pelo facto de se ter obtido um quociente inteiro em cada uma das divisões, a que o mesmo factor está sujeito, não se segue que elle seja raiz. Apesar d'esta condição necessaria não ser sufficiente, permitte-nos o fazer uma eliminação importante nos factores a ensaiar, de tanto maior vantagem, quanto maior fôr o numero d'elles, o que se dá quasi sempre quando ha raizes fraccionárias, entrando no rol, nos divisores do ultimo termo, os dos denominadores dos quebrados raizes, e ainda potencias d'estes divisores.

O criterio não é inteiramente applicavel aos divisores: $+2$ e -2 por isso que para o primeiro d'estes é: $a-1$, ou $2-1$, egual á unidade, e para o segundo: $a+1$ é tambem egual á unidade. Em qualquer d'estes casos, ou prescindimos da indicação que falta, e vêmos se a unica existente é satisfeita, ou appellamos para o seguinte criterio:

Em $F(x) = (x - a)\,Q$, podemos, em vez de 1, substituir qualquer outro numero inteiro, versando a escolha, só para o caso indicado, sobre os numeros: $+n$ e $-n$, com os quaes já não pode dar-se a mesma difficuldade, sendo n differente de 1; mas, como o valor mais simples que lhe podemos attribuir é 2, nada se lucra com a substituição.

22. Seja, como exemplo:

$$x^3 + 5x^2 - 7x + 8 = 0$$

Pela regra de Descartes vêmos que, havendo duas variações para valores de x positivos, a equação, ou admitte duas raizes positivas, ou nenhuma; mas, como $F(o) = +8$ e todos os valores positivos da incognita tornam a funcção positiva, segue-se que não haverá raiz nenhuma positiva. Para valores de x negativos ha uma unica variação, resultando d'ahi, ou uma raiz negativa, ou nenhuma; mas sendo $F(o)$ positivo, á medida que x vae crescendo em valor absoluto, o valor do primeiro termo augmenta a ponto de vir a ser superior ao da somma dos outros, tornando-se n'este caso negativa a funcção; segue-se que n'um certo ponto esta se annulla, e por esse facto tem uma raiz negativa. Dos divisores de 8 só ha a ensaiar: $-2, -4, -8$, depois de se ter reconhecido que:

$$F(+1) = 7 \text{ e } F(-1) = 19$$

Como 7 não é divisivel por nenhum dos numeros: 3, 5, 9, já não é necessario ensaiar a divisibilidade de F (— 1) concluindo-se d'aqui, que não ha nenhuma raiz real inteira.

23. *Exemplo II:*

$$x^3 + 5x^2 - 7x + 4 = 0$$

A applicação da regra de Descartes dá os mesmos resultados que no exemplo precedente, de que este differe sómente pelo ultimo termo, differença que exerce, comtudo, uma influencia consideravel sobre as raizes, como ficou dicto. Só pode ainda haver uma raiz negativa. $F(+1) = -3$, $F(-1) = 15$, e os divisores a experimentar: $-2, -4$. Os valores de $a + 1$ são: 3 e 5, e como 3 não é divisivel pelo ultimo, exclue-se -4; o valor de $a - 1$ para o primeiro é 1, mas reconhece-se immediatamente pela equação, que não satisfaz.

24. *Exemplo III:*

$$\begin{gathered} 28x^7 - 113x^6 - 334x^5 + 972x^4 + 298x^3 \\ - 919x^2 + 8x + 60 = 0 \end{gathered}$$

Substituindo a incognita por: $+1$ e -1, vê-se que estes dois valores são raizes, e por isso divide-se o primeiro membro por $x^2 - 1$, resultando:

$$28x^5 - 113x^4 - 306x^3 + 859x^2 - 8x - 60 = 0$$

Ha tres variações, para x positivo, e o numero de raizes positivas, ou será de tres, ou de uma, se as houver; para x negativo as variações são duas, e será este o numero de raizes negativas, se existirem. Excluindo: $+1$ e -1, que não pertencem á nova equação, os divisores do ultimo termo veem a ser:

2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60; $F(+1) = 400$; $F(-1) = 972$

Organisa-se agora o seguinte diagramma :

Divisores positivos	$a-1$	$\frac{F(+1)}{a-1}$	$a+1$	$\frac{F(-1)}{a+1}$
2	—	—	3	324
3	2	200	4	243
4	3	+		
5	4	100	6	162
6	5	80	7	+
10	9	+		
12	11	+		
15	14	+		
20	19	+		
30	29	+		
60	59	+		

Raizes inteiras positivas só podem ser : 2, 3, 5.

Para examinar quaes são os divisores negativos admissiveis como raizes, temos de repetir a lista dos divisores, organisando novo diagramma em harmonia com o que foi estabelecido no n.º 21, devendo notar-se que se considera *a* como positivo.

Divisores negativos	$a+1$	$\frac{(F+1)}{a+1}$	$a-1$	$\frac{F(-1)}{a-1}$
2	3	+		
3	4	100	2	486
4	5	80	3	324
5	6	+		
6	7	+		
10	11	+		
12	13	+		
15	16	+		
20	21	+		
30	31	+		
60	61	+		

Raizes inteiras negativas só podem ser: — 3, — 4.

Tanto n'um como no outro registo, faz-se a primeira columna de numeros calculados, na segunda os quocientes inteiros, e quando elles forem fraccionarios, evidentemente os factores correspondentes não podem ser raizes. Denuncia-se este facto por meio de uma cruz, e na terceira e quarta columnas de numeros calculados, nada se escreve.

Ficam assim escolhidos os divisores que podem ser raizes; resta averiguar quaes d'elles satisfazem á equação.

25. Processo para a determinação das raizes. — Seja a equação:

$$A x^m + B x^{m-1} + \ldots\ldots + R x^2 + S x + V = 0$$

se a fôr uma das raizes:

$$\frac{V}{a} = -A a^{m-1} - B a^{m-2} - \ldots\ldots - R a - S$$

O segundo membro é inteiro, e tambem o será o primeiro, ou, o que é o mesmo, V divisivel por a.

Faça-se:

$$\frac{V}{a} = q_1;\ q_1 + S = s_1,$$

vem:

$$\frac{s_1}{a} = -A a^{m-2} - B a^{m-3} - \ldots\ldots - R$$

Faça-se:

$$\frac{s_1}{a} = q_2;\ q_2 + R = s_2$$

virá:

$$\frac{s_2}{a} = -A a^{m-3} - B a^{m-4} - \ldots\ldots - Q$$

e por ultimo:

$$q_{m-1} = -A;\ s_{m-1} = 0$$

26. Applicação. — Consideremos a equação precedentemente tratada, para a qual ficaram separados os divisores que podem ser raizes:

$$28x^5 - 113x^4 - 306x^3 + 859x^2 - 8x - 60 = 0$$

Divisores:	$+2$	$+3$	$+5$	-3	-4	
q_1:	-30	-20	-12	$+20$	$+15$	$(V = -60)$
s_1:	-38	-28	-20	$+12$	$+7$	$(S = -8)$
q_2:	-19	$+$	-4	-4	$+$	
s_2:	$+840$		$+855$	$+855$		$(R = +859)$
q_3:	$+420$		$+171$	-285		
s_3:	$+114$		-135	-591		$(Q = -306)$
q_4:	$+57$		-27	$+197$		
s_4:	-56		-140	$+84$		$(P = -113)$
q_5:	-28		-28	-28		
s_5:	0		0	0		$(A = +28)$

D'onde se vê que as raizes inteiras são: $+2, +5, -3$, e como a equação é de quinto gráu, pode ficar completamente resolvida, abaixando-lhe o gráu, tendo-a dividido para esse fim pelo producto dos binomios: $x-2$; $x-5$; $x+3$, achando-se:

$$28x^2 - x - 2 = 0, \text{ cujas raizes são: } -\frac{1}{4};\ +\frac{2}{7}$$

27. Equações incompletas. — Havendo lacunas na equação, devemos considerar como eguaes a zero os coefficientes dos termos que faltam, na theoria expendida, a qual torna-se assim applicavel a este caso. Um, ou mais, quocientes são eguaes ás sommas do mesmo indice, e a resolução não apresenta difficuldade nenhuma, como se pode verificar pelo seguinte:

28. *Exemplo.* $x^6 - 56x^4 + 48x^3 + 43x + 42 = 0$

O numero maximo de raizes reaes é de: duas positivas e duas negativas. Pelo ensaio dos divisores do ultimo termo, apura-se que não pode existir nenhuma raiz real inteira e negativa, e das positivas ha indecisão sobre os numeros 3 e 7.

Quanto a 3 não pode ser raiz, porque o segundo termo dá um producto negativo : 4536 (em valor absoluto), muito superior ao que provém da somma de todos os outros termos positivos.

Resta o numero 7, e obtem-se a série de numeros :

$$q_1 = 6 ; s_1 = 6 + 43 = 49 ; q_2 = 7 ;$$
$$s_2 = 7 + 0 = 7 ; q_3 = 1 ; s_3 = 1 + 48 = 49 ; q_4 = 7 ; s_4 = 7 - 56 = -49 ; q_5 = -7 ; s_5 = -7 + 0 = -7 ; q_6 = -1 ; s_6 = -1 + 1 = 0$$

Por simplicidade, quando a lacuna consistir na falta de um termo, a somma anterior áquella em que deve entrar o zero respectivo divide-se pelo quadrado do numero a ensaiar, e no quociente resultante escreve-se o indice, como se não tivesse havido essa lacuna. Se a falta fôr de dois termos, a somma indicada divide-se pelo cubo do numero ; em geral, havendo uma lacuna de *n* termos, faz-se a divisão d'essa somma pela potencia $n + 1$ do numero a ensaiar. D'este modo escrever-se-hia:

$$q_1 = 6 ; s_1 = 49 ; q_2 = 1 ; s_2 = 49 ; q_3 = 7 ;$$
$$s_3 = -49 ; q_4 = -1 ; s_5 = 0$$

Como esta simplificação não se emprega só para um factor, mas para todos, subsiste a tabella dos valores de q e de s, no exercicio anterior desenvolvida, devendo unicamente accentuar-se bem, ou com um asterisco ao lado do valor de q resultante da divisão por uma potencia do numero ensaiado, ou com a lettra l, ou por um outro qualquer modo, que o numero a inscrever em cada columna e na linha horizontal, começada por aquella lettra, não provém de uma simples divisão.

29. Raizes eguaes. — A propriedade, de que gosam as raizes eguaes, de satisfazerem, não só á equação proposta mas ás derivadas em numero egual ao do gráu de multiplicidade, tem apenas um valor theorico. Em primeiro logar, como não ha caracteres que nos permittam saber *á priori* se n'uma dada equação existem raizes reaes, temos de obter todas as raizes deseguaes inteiras, e só depois de as conseguirmos é que poderemos saber da existencia das eguaes, caso não haja raizes fraccionárias ; em summa, é forçoso seguir todo o processo sem nenhuma simplificação. Em segundo logar, se a raiz real se repete *n* vezes, ou tem um gráu de multiplicidade egual a *n*, o facto de existir em *n* equações de um systema, formado pela equação proposta e as suas *n* — *1* primeiras derivadas, leva a uma eliminação laboriosa e demorada.

A regra de Descartes indica-nos o numero maximo de raizes reaes que pode haver, tanto positivas como negativas; apuram-se, do modo que ficou dicto, as reaes deseguaes; e vê-se logo a seguir se o quadrado de alguma d'estas é divisor do ultimo termo, e, depois do abaixamento do gráu, na equação resultante, ensaia-se a raiz da proposta que satisfaz a essa condição, quando com as primeiras raizes obtidas não ficar exgottado o numero de raizes reaes, assignado pela regra de Descartes. Eis, pois, o que se deve fazer relativamente ás raizes inteiras.

Para tornar estas operações mais expeditas, convém fazel-as quando a equação estiver o mais simples possivel, depois do abaixamento do gráu, proveniente não só das raizes inteiras, mas das fraccionárias. Feito isto, ficam ainda, ou podem ficar, raizes reaes incommensuraveis; mas os valores d'estas, só em casos excepcionaes se acham exactos: obtemol-os por approximação, e, por isso, a cada uma não pode corresponder um abaixamento de gráu, como se dá com as outras, obtidas exactamente.

As incommensuraveis existem sempre em numero par, quando conjugadas; portanto, se depois de obtidas todas as inteiras e fraccionárias, deseguaes, a regra de Descartes indicar que ainda falta um numero impar de raizes reaes, devemos ver se em qualquer dos grupos ha raizes eguaes.

b) *Raizes fraccionárias commensuraveis*

30. Supponhamos a equação constituida por um polynomio inteiro, egualado a zero.

Se houver raizes fraccionárias, o coefficiente do primeiro termo não pode ser a unidade, e se este coefficiente fôr a unidade, não pode haver raizes fraccionárias.

Com effeito, sendo r, r′, r″...., as raizes, a equação pode escrever-se:

$$(x-r)\ (x-r')\ (x-r'')\ldots\ldots\ (x-r_i)=o$$

d'este producto, ordenado em relação ás potencias decrescentes da variavel, resulta o coefficiente 1 para o termo da mais alta potencia, excepto se alguma das raizes fôr fraccionária, porque, n'esse caso, desembaraçando de denominador, ou de denominadores se mais algum houver, irá esse denominador, ou o producto d'elles, servir de coefficiente áquelle termo.

De sorte que, se houver raizes fraccionárias, havemos de desembaraçar de denominadores, e o coefficiente do primeiro termo não pode ser a unidade; pelo contrário, se este fôr egual á unidade, é que não houve nenhuma raiz fraccionária cujo denominador devesse desapparecer.

A segunda parte d'esta proposição tem geralmente sido demonstrada do seguinte modo:

Seja a equação:

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \dots + R x + V = o$$

cujos coefficientes são todos inteiros, sendo o do primeiro termo egual á unidade e supponham-s que admitte a raiz fraccionaria $\frac{a}{b}$, substituindo a incognita por ella, vem:

$$\frac{a^m}{b^m} + A \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + \dots + R \frac{a}{b} + V = o$$

ou:

$$\frac{a^m}{b} = -A a^{m-1} - B a^{m-2} b - \dots\dots - R a b^{m-2} - V b^{m-1}$$

o primeiro membro é fraccionario, o segundo inteiro, devendo a hypothese ser rejeitada por derivar d'ella um resultado absurdo.

31. Sejam as raizes fraccionárias:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \dots \dots \frac{h}{l}$$

a equação pode ser escripta d'este modo

$$(x - \frac{a}{b})(x - \frac{c}{d})(x - \frac{e}{f}) \ldots (x - \frac{h}{l}) f(x) = 0$$

separando as raizes fraccionárias das outras, as quaes entram nos binomios, cujo producto está representado por $f(x)$.

A equação verifica-se, quer annullando o producto dos binomios que n'ella se acham explicitos, quer annullando a ultima funcção. N'este capitulo interessa-nos apenas o producto dos binomios, motivo por que se considera uma equação, admittindo unica e exclusivamente raizes fraccionárias, assim escripta:

$$(1) \ldots\ldots (x - \frac{a}{b})(x - \frac{c}{d})(x - \frac{e}{f}) \ldots\ldots (x - \frac{h}{e}) = 0$$

32. «O menor numero que, multiplicado pela equação, torna todos os seus factores inteiros, é o producto dos denominadores.»

Devemos suppôr sempre, é claro, que todos os quebrados estão reduzidos á expressão mais simples, e por isso os dois termos de cada um d'elles são primos entre si.

Multiplicar a equação pelo producto: b d f.... l, corresponde a multiplicar o primeiro factor por b, o segundo por *d*, e assim successivamente, até o ultimo ficar multiplicado por *l*, resultando o seguinte:

$$(2) \ldots\ldots (bx - a)(dx - c)(fx - e) \ldots\ldots (lx - h) = 0$$

Se faltassem quaesquer d'aquelles factores, haveria egual numero de binomios, não inteiros, e não podiamos no producto *b d f... l* substituir qualquer dos denominadores, que seja multiplo, por um dos factores d'este, porque o quebrado respectivo, sendo multiplicado por esse factor, não dá um producto inteiro, como é para desejar.

Suppondo que um denominador *d*, por exemplo, tinha sido excluido, ficariam inteiros todos os binomios, á excepção do segundo, e o resultado seria:

$$M(x - \frac{c}{d}) = Mx - M\frac{c}{d} = 0,$$

em que M exprime o producto dos binomios restantes. Os coefficientes de Mx são todos inteiros, mas em $M\frac{e}{d}$ os coefficientes apparecem fraccionarios, e no resultado final vão addicionar-se respectivamente aos do outro polynomio, não permittindo, portanto, o ficarem inteiros os do polynomio resultante.

33. «O menor numero que, multiplicado pela equação, torna inteiros os coefficientes do seu desenvolvimento segundo as potencias da variavel, é ainda o producto dos donominadores.»

Que este producto torna inteiros todos os coefficientes, já ficou demonstrado; mas basta que na equação entrem raizes reciprocas, para que se possa pôr em dúvida se esse será realmente o menor numero pelo qual tenhamos de multiplical-a para conseguir esse resultado. Havendo, como raizes, duas fracções irreductiveis: $\frac{c}{d}$ e $\frac{d}{e}$, como o seu producto é egual á unidade, segue-se que não teremos de multiplicar por dc os coefficientes em que ellas entram, para os tornar inteiros, bastando multiplicar estes pelo producto dos outros denominadores; mas ha coefficientes em que as duas fracções não entram simultaneamente, o que obriga a introduzir os dois factores c e d no numero pelo qual se tem de multiplicar a equação. Quer pensemos, pois, no producto dos binomios, quer nos coefficientes do desenvolvimento, havemos inevitavelmente de chegar ao mesmo resultado.

34. Depois de desembaraçada a equação dos denominadores, os coefficientes das diversas potencias da variavel devem ser primos entre si; porque, se assim não fôsse, não seria o producto dos denominadores o menor numero que tornava a equação inteira, mas o quociente obtido, dividindo este producto pelo factor commum.

Esta proposição, devéras interessante e util, ha de ser demonstrada ainda de outro modo.

35. Do exposto conclue-se que na equação com a forma (2) o coefficiente da maior potencia da variavel é o producto dos denominadores, e o termo independente o producto dos numeradores. Quanto aos outros termos, facil é de apurar a lei que seguem.

Se considerarmos os dois primeiros factores e desenvolvermos o seu producto, vem:

$$\begin{array}{r|l} bdx^2 - ad & x + ac \\ -bc & \end{array}$$

os tres primeiros:

$$\begin{array}{r|r|l} bdfx^3 - adf & x^2 + acf & x - ace \\ -bcf & +ade & \\ -bde & +bce & \end{array}$$

os quatro primeiros:

$$\begin{array}{r|r|r|l} bdfgx^4 - adfg & x^3 + aefg & x^2 - aceg & x + aceh \\ -bcfg & +adeg & -acfh & \\ -bdeg & +bceg & -adeh & \\ -bdfh & +adfh & -bceh & \\ & +bcfh & & \\ & +bdeh & & \end{array}$$

e, proseguindo n'estas operações até o factor de ordem i, a inducção mostra-nos factos que, verificando-se ainda ao extendermos o processo a um novo factor, que será, por conseguinte, de ordem $i + 1$, se tornam em verdadeiras leis.

Observa-se que o coefficiente de cada termo do desenvolvimento é composto de tantos factores, quantos os binomios, sendo no primeiro o producto dos denominadores, e no ultimo o producto dos numeradores, como acima se notou.

No segundo termo do polynomio ordenado entram os productos differentes dos denominadores, tomados $m - 1$ a $m - 1$, multiplicado cada um d'elles pelo numerador correspondente ao denominador que n'elle falta.

No terceiro termo do polynomio ordenado entram os productos differentes dos denominadores, tomados $m - 2$ a $m - 2$, multiplicado cada um d'elles pelo producto dos numeradores correspondentes aos dois denominadores que n'elle faltam.

E assim successivamente.

Caminhando do fim para o principio, podiamos exprimir estas diversas propriedades dizendo que no penultimo termo do polynomio ordenado entram os productos differentes dos numeradores, tomados $m - 1$ a $m - 1$, multiplicado cada um d'elles pelo denominador correspondente ao numerador que falta. O coefficiente do ante-penultimo termo é formado pelos productos differentes dos numeradores, tomados $m - 2$ a $m - 2$, multiplicado cada um d'elles pelo producto dos denominadores correspondentes aos numeradores que n'elle faltam.

E, proseguindo, ir-se-hia verificando de termo em termo o que precedentemente ficou apontado.

Reconhece-se a existencia da lei de formação, generalisando os factos descriptos, pelo processo seguinte:

O que se nota n'um producto de binomios: P, ainda se verifica multiplicando este por um novo binomio $(s\,x - r)$, devido a uma nova raiz introduzida: $\frac{r}{s}$.

Vem:

$$P\,s\,x - P\,r = o$$

Immediatamente se reconhece que os termos do desenvolvimento de $P\,s\,x$ teem nos seus coefficientes um factor a mais do que os que entram no desenvolvimento de $P = O$, esse factor é s; nos de $P\,r$ entra ainda um factor a mais, que é r, e, em ambos os casos, em todos os coefficientes haverá tantos factores, quantas as raizes de $P\,(s\,x - r) = o$.

A mais alta potencia d'esta equação, a qual egualmente é a mais alta das que apparecem no desenvolvimento de $P\,s\,x$, tem por coefficiente o producto dos denominadores. O termo independente da incognita e que só apparece em $P r$, é formado pelo producto dos numeradores.

O segundo termo do desenvolvimento do polynomio resultante, ordenado segundo as potencias decrescentes da incognita, é constituido pelo segundo termo do desenvolvimento de P, multiplicado por s e accrescentado do primeiro de P multiplicado por r. No polynomio d'este coefficiente, os termos são formados pelos productos differentes dos denominadores, tomados *m — 1* a *m — 1*, multiplicado cada um d'elles pelo numerador correspondente ao denominador excluido.

A verificação levada a todos os termos confirma, pois, o que se tinha deduzido, e consagra como verdadeiras leis os resultados obtidos.

36. Numero total de termos. — Os termos do polynomio, ordenado segundo as potencias da incognita, são verdadeiros polynomios em geral, e a totalidade dos termos de todos estes polynomios é expressa pelo mesmo numero, que representa o dos termos do producto dos seguintes factores :

$$(b+a)\ (d+c)\ (f+e) \ldots\ldots (l+h)$$

N'este desenvolvimento, como no outro, não entra em cada termo senão uma das parcellas de cada binomio, e nenhum dos binomios deixa de ser representado em cada um d'esses termos, cujo numero não muda pelo facto de fazermos todos os factores eguaes entre si e ao primeiro, resultando uma potencia *m* do binomio $b+a$, a qual, desenvolvida pela fórmula do binomio de Newton, nos vem apresentar na somma dos coefficientes :

$$1 + c_m^1 + c_m^2 + c_m^3 + \ldots + c_m^m$$

o resultado desejado, o qual se exprime por 2^m, sendo *m* o numero de factores binomios, de sorte que o desenvolvimento tem sempre um numero par de termos.

37. Os termos que, agrupados, formam os coefficientes do desenvolvimento de (2) não admittem divisor commum.

Desenvolvendo o producto de todos os binomios de (2), a partir do segundo, reconhece-se immediatamente, ao fazer a multiplicação do polynomio, assim obtido, pelo primeiro binomio, que a cada termo: a M′, corresponde outro: b M′ ; de maneira que a totalidade da série se pode escrever, decomposta em duas partes :

$$\begin{array}{l} a\,M', a\,M'', a\,M''' \ldots\ldots\ldots a\,M_s \\ b\,M', b\,M'', b\,M''' \ldots\ldots\ldots b\,M_s \end{array}$$

Admittindo todos os termos um divisor, este sel-o-ha de a M′ e de *b M′*, e, pelo facto de *a* e *b* serem primos entre si, dividirá M′ e da mesma sorte: M″, M‴.... M_s.

Esta nova série, composta de $\frac{1}{2} \times 2^m$ quantidades, ou 2^{m-1}, já não contém *a* nem *b*, e obtem-se de um modo analogo ao da primeira, fazendo o producto de todos os factores binomios de (2), a partir do terceiro, pelos termos do segundo, e, por isso, se pode decompor tambem em duas partes:

$$\begin{array}{l} c\,N', c\,N'', \ldots\ldots\ldots\; c\,N_v \\ d\,N', d\,N'', \ldots\ldots\ldots\; d\,N_v \end{array}$$

A divisibilidade da série anterior requer a das quantidades: N′, N″.... N_v, nas quaes já não apparecem: *a*, *b*, *c*, *d*. Passando ás séries seguintes, iriamos eliminando os termos dos outros quebrados, de sorte que a série de ordem *m* — *2* só conterá os quatro termos dos dois ultimos quebrados, e se estes forem:

$$\frac{i}{k}, \frac{h}{l} \text{ virá: } \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{Bmatrix} l \\ l \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{Bmatrix} h \\ h \end{Bmatrix}$$

o que requer a divisibilidade pelo referido factor das quantidades: *l* e *h*, termos do mesmo quebrado e primos entre si, o que é impossivel.

A eliminação podia ter começado pelos dois termos de um qualquer dos quebrados e acabar nos de qualquer dos outros.

Conclue-se d'esta analyse, que os termos, os quaes pelo seu agrupamento formam os coefficientes do desenvolvimento, são primos entre si; se assim não fôsse, podiam os coefficientes da incognita admittir um divisor commum, ao contrário do que está provado. Havendo, comtudo, um divisor commum a todos os coefficientes, não seria este facto incompativel com o que se acabou de demonstrar; mas os coefficientes, como ficou visto, são da mesma sorte primos entre si.

38. O problema da determinação das raizes fraccionárias pode reduzir-se ao das inteiras. — Effectivamente se em $F(x) = 0$ substituirmos a incognita por y, dividido pelo coefficiente A da mais alta potencia de x, e em seguida desembaraçarmos de denominadores na equação resultante, o coefficiente da mais alta potencia de y será a unidade, e das novas raizes inteiras se deduzem as da equação anterior, dando-lhes o denominador commum A. Da equação:

$$17x^5 - 8x^4 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$$

a transformada será:

$$y^5 - 8y^4 + 5.17^2.y^2 + 6.17^3 y + 2.17^4 = 0$$

Ha vantagem, em que o denominador commum seja o menor possivel para tornar menos laboriosa a fórmação da transformada. Muito sinto que a estreiteza do espaço me não permitta desenvolver aqui o estudo que apresentei sobre este ponto. Fal-o-hei n'uma publicação subsequente.

39. Quando o coefficiente do primeiro termo não fôr a unidade, o problema da determinação das raizes inteiras reduz-se ao das fraccionárias. — Desembaraça-se a equação do coefficiente do primeiro termo pelo processo anterior, e, obtida a transformada, que tem unicamente raizes inteiras, dividiremos estas pelo denominador commum z. As raizes inteiras da proposta apparecem na transformada multiplicadas por esta quantidade, de sorte que, pela divisão subsequente a que vamos sujeitar os productos, não se lhes alteram os valores.

Seja a equação:

$$24x^4 - 58x^3 + 17x^2 - 5x - 2 = 0$$

e a transformada vem:

$$y^4 - 58y^3 + 17.24y^2 - 5.24^2.y - 2.24^3 = 0$$

ora, a equação é, feitas as operações:

$$y^4 - 58y^3 + 408y^2 - 2880y - 27648 = 0$$

d'onde se obteem as raizes:

$$+12, -8, +6, +48$$

cujos valores, divididos por 24, nos permittem achar para a equação proposta as seguintes raizes:

$$+\frac{12}{24}=+\frac{1}{2};-\frac{8}{24}=-\frac{1}{3};+\frac{6}{24}=$$

$$+\frac{1}{4};+\frac{48}{24}=+2$$

e a raiz inteira $+2$, apparece assim, obtida pelo processo a que se recorre para achar as raizes fraccionárias.

Da mesma sorte, para a equação:

$$20x^5-51x^4+39x^3-45x^2+19x+6=0$$

obteem-se, sujeitando-a ao processo seguido para as raizes fraccionárias, as raizes:

$$\frac{3}{4},\ \frac{1}{5}\ \text{e}\ 2$$

Tanto n'este como em todos os outros casos, deve ter-se em vista, que o primeiro cuidado com a equação é o de verificar se $+1$ e -1 a satisfazem; porque qualquer que seja d'estas duas a raiz por ella admittida, é facilimo de verificar a existencia de cada uma; o processo torna-se depois menos penoso, abaixando-se devidamente o gráu da equação.

Realmente, não ha um processo caracteristico, exclusivamente empregado para as raizes fraccionárias, como parece deprehender-se da ultima epigraphe; o que é privativo d'estas raizes, é o processo pelo qual se obtem a transformada; ora, pelo que respeita a raizes inteiras, já ficou visto, que as podemos obter sem necessidade d'este expediente, indispensavel para as outras.

Quando é forçoso o emprêgo da transformada, o cálculo, tal como foi precedentemente apresentado, levar-nos-hia a grandes e penosos desenvolvimentos, tornando-se por isso de necessidade immediata o seguir as prescripções adeante aconselhadas.

40. Maneira de evitar um grande numero de ensaio para obter as raizes da transformada. — Como as raize da transformada devem ser factores do ultimo termo, o numero de ensaios, feitos pelo processo seguido para as raizes inteiras, sem modificação nem restricção de nenhuma especie, seria extraordinariamente grande, havendo um labyrintho inextricavel de cálculos, com prejuizo dos resultados, attenta a grande facilidade de assim se commetterem erros, e um disperdicio enorme de tempo.

Basta, para o reconhecimento d'esta verdade, pensar que no caso mais favoravel, o de serem primos, tanto o ultimo termo, designado por S no n.º 38, como o coefficiente A do primeiro, o numero de divisores do ultimo termo da transformada, $S\,A^{m-1}$ será $2.\,(1+1)\,.\,(m-1+1) = 4.\,m$, ou, o quádruplo do gráu da equação! No computo, assim feito, attendeu-se, como devia ser, ao facto de terem de ser contados pelo dôbro esses divisores, visto que as raizes tanto podem ser positivas como negativas.

O numero de ensaios diminuirá consideravelmente ponderando a circumstancia de que as raizes da transformada são eguaes aos productos das da proposta por z, sendo este o denominador commum, e, por isso, não é necessario procurar factores para o producto $S\,z^{m-1}$. As raizes da proposta teem os seus numeradores entre os divisores de S, e os ensaios devem versar sobre os productos d'estes por z. Entre os divisores de S figuram ainda as raizes inteiras da equação dada.

D'este modo, fica muito reduzido o trabalho. É certo que o ultimo termo da transformada pode ser menor que o valor $S\,A^{m-1}$, acima apresentado, quando se der o facto de ser z menor que A; mas, então, esta ultima quantidade, em vez de numero primo, como alli foi supposto, é um producto de vários factores, e bastava um unico d'estes para trazer a complicação descripta; se ponderarmos, agora, o que deviam ser os ensaios, quando tivessemos de apurar a totalidade de divisores, positivos e negativos, que pode comportar o valor do ultimo termo, não deixaremos de convir que, sem aquella indicação, que simplifica extremamente o trabalho, quasi que seria impossivel levar o processo por deante.

Na penultima equação apresentada:

$$24\,x^4 - 58\,x^3 + 17\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$$

o ultimo termo é 2 e o da transformada: $2 \times 24^3 = 2^{10}.\,3^3$.

Em vez de: $2 \times (3+1) \times (10+1) = 88$, ensaios, temos só os quatro: $+1, +2, -1, -2$, divisores de 2, e, por isso, os unicos ensaios admissiveis serão os dos productos d'estes numeros por 24, ou: $+24, +48, -24, -48$, para se obter a raiz inteira 2.

Podiamos abaixar já o gráu da equação dividindo-a por $x-2$; mas, como a raiz inteira, que acabámos de obter, é exactamente egual ao ultimo termo, e este deve ser o producto d'ella pelos numeradores das raizes fraccionárias, resulta que estes numeradores devem ser eguaes á unidade.

Foi $+48$ a raiz da transformada que produziu pela sua divisão por 24 essa raiz; as outras raizes da transformada devem ser taes que, designando-as respectivamente por a, b, e c, sejam os quebrados, resultantes para as raizes da proposta: $\frac{a}{24}, \frac{b}{24}, \frac{c}{24}$, ou, reduzidos á sua expressão mais simples: $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$, sendo: a', b', c', divisores de 24, visto que os numeradores devem ser eguaes á unidade.

Os divisores de 24, que ha a ensaiar, são: $+2, +3, +4, +6, +8, +12$ e: $-2, -3, -4, -6, -12$; portanto, as raizes inteiras da transformada devem achar-se n'estes grupos, vindo, com effeito: $+12, -8, +6$.

41. As raizes a achar são em geral:

$$\frac{d}{D}, \frac{d'}{D'}, \frac{d''}{D''} \ldots\ldots;$$

sendo os numeradores divisores do ultimo termo e os denominadores, divisores do coefficiente A do primeiro; ora, em vez d'estes quebrados, reduzidos á expressão mais simples, obtemos:

$$\frac{a}{A}, \frac{b}{A}, \frac{c}{A} \ldots\ldots;$$

d'onde:

$$a = d.f,\ A = D.f;\ b = d.'f',\ A = D'f';$$
$$c = d.''f'',\ A = D''f'' \ldots\ldots;$$

e como a, b, c.... são as raizes da transformada e f, f', f''.... factores de A, os numeros a ensaiar devem ser productos de dois factores : um d'estes, divisor do coefficiente do primeiro termo e o outro divisor do ultimo termo. Sejam : $A = f^q \times f'^n \times f''^p$ e $S = f_1^r \times f_2^s \times f_3^t$, no caso peor teriamos, como ultimo termo da transformada, $S.A^{m-1}$ ou : $f^q \times f'^n \times f''^p \times f_1^{r(m-1)} \times f_2^{s(m-1)} \times f_3^{t(m-1)}$; o numero de divisores será :

$$(q+1)(n+1)(p+1).[r(m-1)+1]\times [s(m-1)+1][t(m-1)+1]$$

em vez d'este exorbitante numero, a que o gráu da equação, por entrar em todos os factores provenientes de S, vem dar um valor consideravel, teremos simplesmente para o numero de ensaios a fazer sobre a transformada :

$$(q+1)(n+1)(p+1)(r+1)(s+1)(t+1)$$

Devemos convir, todavia, que o trabalho ainda se pode tornar muito penoso, sobretudo se as duas quantidades A e S admittirem um grande numero de factores. Este, como ficou dicto, é o caso peor; muitos outros ha, em que se não tornam indispensaveis tantas operações, como no do exemplo a que precedentemente se applicou. O ultimo termo pode ser menor do que o valor $S.A^{m-1}$, sem que por tal motivo o numero de divisores a ensaiar na transformada :

$$(q+1)(n+1)........(t+1)$$

seja reduzido, porque este depende unicamente dos divisores de A e de S. Quando estas quantidades fôrem representadas por numeros primos, dá-se o caso mais simples, as raizes da transformada devem provir do grupo :

$$+1, +A, +S, +AS, -1, -A, -S, -AS$$

e as da proposta :

$$+\frac{1}{A}, +1, +\frac{S}{A}, +S, -\frac{1}{A}, -1, \frac{S}{A}, -S$$

duas d'estas : $+1, -1$, são muito faceis de achar pela simples inspecção do exemplo que se apresenta, e as outras, em pequeno numero, depressa se ensaiam.

E como do exposto se tira a conclusão de que *no caso de serem primos o coefficiente do primeiro termo e o ultimo termo, não é necessario fazer a transformada*, podemos, realmente, ensaiar logo na equação, que se propôz, os valores inteiros : $+S, -S$ e os fraccionarios :

$$+\frac{1}{A}, +\frac{S}{A}, -\frac{1}{A}, -\frac{S}{A}$$

cujo numero fica ainda reduzido pela applicação do theorema de Descartes, na maior parte dos casos.

42. Processo a seguir. — Dada uma equação cujo coefficiente do primeiro termo não é a unidade, o primeiro cuidado que devemos ter é examinar, pela regra de Descartes, qual o numero maximo de raizes positivas e negativas que ella pode comportar, bem como os numeros, além d'esses, reputados por essa regra como admissiveis. Podendo haver raizes positivas, experimentar-se-ha $+1$, e no caso de poderem existir negativas, o valor -1. Se alguma d'estas quantidades fôr uma raiz, ou ambas, divide-se a equação pelo respectivo binomio, ou pelo producto dos respectivos binomios, abaixando-se o gráu. Trata-se em seguida das raizes inteiras, differentes d'essas; supponde que apurámos as raizes: a, b, c, ... l, forma-se o producto :

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-l)$$

levando o gráu da equação ao ponto minimo a que ella pode chegar, antes de nos vermos obrigados a recorrer ao cálculo da transformada e operações subsequentes, o qual só se fará, quando inteiramente não possa deixar de ser.

Ha muitas equações, em que se torna facilima a pesquisa das raizes commensuraveis, sendo aliás extremamente complexo esse trabalho, se fôrmos seguir sem mais exame todas as prescripções apontadas. Nada suppre o bom criterio, que só a prática, esclarecida pelas regras da theoria, pode dar.

Assim, por exemplo, supponhamos que se trata da equação:

$$12\,x^7 - 4\,x^2 + 7\,x - 8 = 0$$

Mostra-nos o theorema de Descartes que, para valores positivos da incognita, o numero de variações é de tres, e por isso, ou haverá uma raiz commensuravel positiva, ou tres; para valores negativos não ha variação nenhuma, e por isso é desnecessario procurar raizes negativas.

Representando, como de costume, por y o primeiro membrod a equação para o valor de $x = +1$, que temos a experimentar primeiro que tudo, resulta: $y = +7$. Deviamos ir agora procurar raizes inteiras, ensaiando os divisores positivos do ultimo termo: $+2, +4, +8$; mas convém pensar que, para $x = o$ é $y = -8$, portanto, existe uma raiz, não inteira, entre os valores de x: 0 e $+1$. Para: $x = +2$ vem: $y = +124$ e d'aqui para cima y cresce positivamente, á medida que vae crescendo a outra incognita, resultando d'este facto o não serem admissiveis nenhumas raizes inteiras.

Se ha alguma raiz commensuravel deve, pois, ser fraccionária e comprehendida entre 0 e 1.

N'este caso podemos obter para a transformada, fazendo $z = 2.3$:

$$y^7 - 4.2^3.3^4.y^2 + 7.2^4.3^{/5}.y - 8.2^5.3^6 = 0$$

e como o ultimo termo é: $2^8.\ 3^6$, o numero dc ensaios devia ser de: $9 \times 7 = 63$, visto o tornarem-se inadmissiveis as raizes negativas, senão dobrar-se-hia o numero. Pela simplificação do n.º 42, vêmos que os numeradores só podem ser: $+1, +2, +4, +8$; por outro lado, o denominador é: $z = 2.3$ e por isso as raizes inteiras da transformada devem estar no grupo:

$$+1 \times 2 = +2; +1 \times 4 = +4;$$
$$+1 \times 8 = +8; +2 \times 2 = +4; +2 \times 4 = +8; 2 \times 8 =$$
$$+16; +3 \times 2 = 6; +3 \times 4 = +12;$$
$$+3 \times 8 = +24$$

sendo só admissiveis:

$$+2, +4, +6, +8, +12, +16, +24$$

que dariam para a proposta:

$$+\frac{2}{6}=+\frac{1}{3};+\frac{4}{6}=+\frac{2}{3};+\frac{6}{6}=+1;+\frac{8}{6}=$$
$$+\frac{4}{3};+\frac{12}{6}=+2;+\frac{16}{6}=+\frac{8}{3};+\frac{24}{6}=+4.$$

Ora, só é admissivel uma raiz commensuravel, comprehendida entre 0 e 1, o que leva a excluir todas as fracções e numeros inteiros, excepto $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{4}$, unicos numeros que ha a ensaiar.

Substituindo x pelo ultimo valor, vem:

$$y=\frac{1536}{2187}-\frac{16}{9}+\frac{14}{3}-8$$

expressão que evidentemente não é nulla, e por isso não se torna necessario effectuar as operações n'ella indicadas.

A unica raiz positiva existente deve ser incommensuravel, porque o outro valor $\frac{1}{3}$ ainda dá um resultado menor do que o acima escripto.

Podiamos multiplicar os exemplos, para demonstrar como em muitas das equações se simplifica o processo; mas a exiguidade do quadro em que se deve circumscrever este trabalho não permitte grandes desenvolvimentos.

c) *Raizes incommensuraveis*

Teem sido apresentados differentes processos para a extracção d'estas raizes, as quaes, a não ser em um ou outro caso excepcional, só podem ser obtidas por approximação com o numero de casas decimaes exigido.

Na prática, os processos mais recommendaveis, de uma interpretação geometrica simples, são dois: o das *tangentes* e o das *cordas*. O apêrto do espaço obriga-me a sacrificar este interessante capitulo, o mais util no ponto de vista do cálculo das operações financeiras, e, por isso, reservo para outra publicação o seu desenvolvimento. Direi, todavia, em rapida resenha, qual o caminho a seguir.

Processo das tangentes. — Sendo $F(x) = 0$ a equação cujas raizes incommensuraveis devem ser determinadas, supponha-se construida a curva $y = F(x)$, da qual serão raizes reaes, como já se mostrou, as abscissas dos pontos de intersecção com o eixo dos $x\,x$, conhecidas as quaes ficará o problema resolvido. O processo permitte que determinemos com approximação qualquer das raizes reaes, mas é particularmente recommendado para as incommensuraveis, visto que as outras podem ser obtidas com exactidão pelos meios anteriormente descriptos.

Partindo de um valor x_1, pouco differente do da raiz que se pretende achar, o que se pode sempre fazer, tomemol-o para abscissa e determine-se a ordenada respectiva y_1; tire-se á curva uma tangente n'este ponto e determine-se pela equação d'esta recta o ponto de abscissa x_2, em que ella corta o eixo dos $x\,x$. Introduzido este valor na equação da curva, obtem-se uma ordenada correspondente y_2. Tire-se uma nova tangente, que será agora no ponto de coordenadas x_2 e y_2 e determine-se do mesmo modo o ponto em que esta linha corta o eixo das abscissas.

Continuando a operar do mesmo modo, chegaremos assim a obter para x um valor tão approximado do que se pretende, quanto se desejar.

A constancia em dois valores successivos do algarismo que occupa a mesma casa decimal denota que esse algarismo pertence, e no logar em que está, á raiz.

A curva intercepta geralmente o eixo das abscissas fazendo com elle dois angulos, um agudo e outro obtuso; as tangentes successivas, entre os pontos de contacto e os seus pés no eixo dos $x\,x$, devem estar comprehendidas no primeiro. Facil é de vêr que esta condição pode deixar de se realisar com a primeira tangente, se não pudermos por meio de alguns pontos de passagem, préviamente obtidos, formar uma idéa da continuidade da curva; mas ainda que se dê este facto, o processo pode ser applicado, porque ao pé da tangente vae corresponder então um ponto, que está do outro lado do eixo das abscissas, em relação no que serviu de partida, e d'alli em deante todos os outros devem satisfazer á condição requerida.

Pode dar-se o caso de incidir a curva normalmente ao eixo das abscissas, o que facilmente se reconhece determinando-se logo pela derivada da funcção a raiz; pode uma ordenada ser tangente á curva, modificando-se por isso o valor da abscissa de que partimos; ou notar-se qualquer outra singularidade. A curva é uma parabola, de numero *n*, da ordem *m*, o seu traçado é sempre simples e sem custo se vê em cada caso como se deve proceder, quando se nos deparar uma excepção.

Processo das cordas. — Determinamos dois pontos da curva, comprehendendo o da raiz, em seguida a intersecção com o eixo das abscissas da corda que os une, bem como a ordenada do ponto da curva, correspondente a essa intersecção. A nova corda passa por este ponto e por aquelle dos outros dois, situado do outro lado do eixo, e assim successivamente.

Na equação: $x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0$ partindo de $x_1 = 3$ obtemos pelo primeiro processo: $x = 2{,}4142135\ldots$

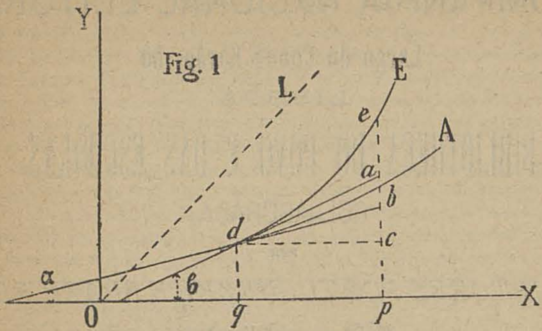

Fig. 1

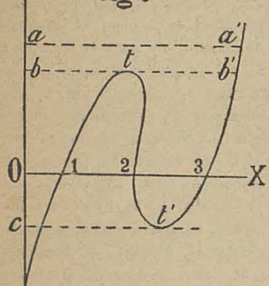

Fig. 3

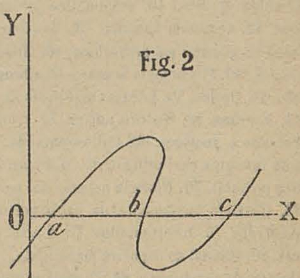

Fig. 2

SECÇÃO EDITORIAL

DA

COMPANHIA NACIONAL EDITORA

Largo do Conde Barão, 50

LISBOA

BIBLIOTHECA DO POVO E DAS ESCHOLAS

COLLABORADA

POR

ESCRIPTORES PORTUGUEZES E BRAZILEIROS

Volumes publicados:

1.ª **Serie**: N.º 1. Historia de Portugal. 2. Geographia geral. 3. Mythologia. 4. Introducção ás sciencias physico-naturaes. 5. Arithmetica práctica. 6. Zoologia. 7. Chorographia de Portugal. 8. Physica elementar. 2.ª **Serie**: N.º 9. Botanica. 10. Astronomia popular. 11. Desenho linear. 12. Economia politica. 13. Agricultura. 14. Algebra. 15. Mammiferos 16. Hygiene. 3.ª **Serie**: N.º 17. Principios geraes de Chimica. 18. Noções geraes de Jurisprudencia. 19. Manual do fabricante de vernizes. 20. Telegraphia electrica. 21. Geometria plana. 22. A terra e os mares. 23. Acustica. 24. Gymnastica. 4.ª **Serie**: N.º 25. As colonias portuguezas. 26. Noções de Musica. 27. Chimica inorganica 28. Centuria de celebridades femininas. 29. Mineralogia. 30. O Marquez de Pombal. 31. Geologia. 32. Codigo civil portuguez. 5.ª **Serie**: N.º 33. Historia natural das aves. 34. Meteorologia. 35. Chorographia do Brazil. 36. O homem na serie animal. 37. Tactica e armas de guerra. 38. Direito romano. 39. Chimica organica. 40. Grammatica portugueza. 6.ª **Serie**: N.º 41. Escripturação commercial. 42. Anatomia humana. 43. Geometria no espaço. 44. Hygiene da alimentação. 45. Philosophia popular em proverbios. 46. Historia universal. 47. Biologia. 48. Gravidade. 7.ª **Serie**: N.º 49. Physiologia humana. 50. Chronologia. 51. Calor. 52. O mar. 53. Hygiene da habitação. 54. Optica. 55. As raças historicas na Lusitania. 56. Medicina domestica. 8.ª **Serie**: N.º 57. Esgrima. 58. Historia antiga. 59. Reptis e batrachios. 60. Natação. 61. Electricidade 62. Fabulas e apologos. 63. Philosophia. 64. Grammatica franceza. 9.ª **Serie**: N.º 65. Historia da Botanica em Portugal. 66. Mechanica. 67. Moral. 68. Práctica de Escripturação. 69. O livro do Natal. 70. Historia natural dos peixes. 71. Magnetismo. 72. O vidro. 10.ª **Serie**: N.º 73. O codigo fundamental da nação portugueza. 74. Machinas de vapor. 75. Historia da Edade-Média. 76. Invertebrados. 77. A arte no theatro. 78. Photographia. 79. Methodo de francez. 80. Manual do fogueiro machinista. 1.ª **Serie**: N.º 81. Pedagogia. 82. A arte naval. 83. Manual do carpinteiro. 84. O cholera e seus inimigos. 85. Hydrostatica. 86. Piscicultura. 87. Direito publico internacional. 88. Lisboa e o cholera. 12.ª **Serie**: N.º 89. Historia natural dos articulados. 90. Historia maritima. 91. Topographia. 92. Historia moderna. 93. Psychologia. 94. O Brazil nos tempos coloniaes. 95. Hygiene do vestuario. 96. Geometria descriptiva. 13.ª **Serie**: N.º 97. A Guerra da Independencia. 98. Leitura e recitação. 99. Forificação. 100. O navio. 101. Historia contemporanea. 102. Armaria. 103. Coisas portuguezas. 104. Viticultura. 14.ª Serie: N.º 105. Sociedades cooperativas. 106. Portugal pre-historico. 107. Equitação. 108. Direito internacional maritimo. 109. Zootechnia. 110. Metallurgia. 111. Manual do ferrador. 112. Restauração de quadros e gravuras. 15.ª Serie: N.º 113. Architectura. 114. Os insectos. 115. Viagens e descobrimentos maritimos. 116 Arte dramatica. 117. Vinhedos e Vinhos. 118. Grammatica ingleza. 119. Silvicultura. 120. Historia do theatro em Portugal. 16.ª Serie: N.º 121. Romanceiro portuguez. 122. A luz electrica. 123. O Brazil Independente. 124. Crystaes. 125. Plantas uteis dos campos de Portugal. 126. Caminhos-de-ferro. 127. O exterior do cavallo. 128. O macho e a femea no reino animal. 17.ª Serie: N.º 129. Desenho e Pintura. 130. As ilhas adjacentes. 131. Historia da Grecia. 132. Architectura Sacra 133 Viagens e descobrimentos terrestres. 134. Astronomia Photographica. 135. Civilidade. 136. A unidade na Natureza. 18.ª Serie: N.º 137. O Archipelago dos Açores. 138. Manual do Typographo. 139. Ilhas Occidentaes do Archipelago Açoriano. 140. Alphabeto natural. 141. Copa e cozinha. 142. Trigonometria. 143. Formulario commercial. 144. Historia da Philosophia. 19.ª Serie: N.º 145. Plantas uteis das mattas de Portugal. 146. Methodo de inglez. 147. Methodologia. 148. Os adubos agricolas. 149. Marinha portugueza. 150. Os balões em Portugal. 151. Logica. 152. Microbios e doenças. 20.ª Serie: N.º 153. Historia Romana 154. A polvora e os explosivos modernos. 155. Receitas uteis. 156. Artilharia. 157. Hypnotismo e suggestão. 158. Aerostação 159. A Medicina nos casos urgentes. 160. Vulcões e movimentos do solo. 21.ª Serie: N.º 161. Os heroes de 1640. 162. Lingua portugueza. 163 A mulher na Antiguidade 164. Angola. 165. Poetica. 166. Viagens e descobrimentos maritimos dos Portuguezes. 167. A Revolução da Maria da Fonte. 168. Manual do infermeiro. 22.ª Serie: N.º 169. Deveres do homem. 170. O somno e os sonhos. 171. Historia da Musica. 172. Grammatica latina. 173. A instituição consular. 174. Fastos Açorianos. 175. Lingua da Africa. 176. A previsão do tempo. 23.ª Serie: N.º 177. Costumes Angolenses. 178. Falsificação dos generos alimenticios. 179. A missão da mulher. 180. Problemas de Arithmetica. 181. Archeologia. 182. Historia antiga do Egypto. 183. Macau. 184. Acclimação. 24.ª Serie: N.º 185. Portugal e a Grecia. 186. A loucura e o genio. 187. Manual do ensaiador dramatico. 188. Hygiene do quarto da cama. 189. As epopêas homericas. 190. O livro da Semana-Santa. 191. Timor. 192. Os Bobos. 25.ª Serie: N.º 193. As linguas de Angola. 194 Philologia. 195. Hygiene da belleza. 196. O Livro das Mães. 197. Archaismos. 198. O Continente Negro. 199. Arte para todos. 200. O feminismo na industria portugueza. 26.ª Serie: N.º 201. Geographia Mathematica. 202. Descobrimento do caminho maritimo para a India. 203. Artes graphicas. 204. A Hespanha antiga e moderna. 205. A Hespanha Contemporanea. 206. Manual de Pintura. 207. Funcções e Equações numericas.

Cada série de 8 volumes, cartonada em percalina, 500 réis; capa separada para cartonar cada série, 100 réis.

Quem desejar ser assignante d'esta publicação, ou comprar qualquer volume avulso, queira dirigir-se, em Lisboa, á Secção Editorial da Companhia Nacional Editora, Largo do Conde Barão, ou ao gerente da agencia no Porto, Largo dos Loyos, 47, 1.º, e no Rio de Janeiro a A. Mascarenhas & C.ª, representante da mesma Companhia, Rua da Quitanda, 38

Todas as requisições devem ser acompanhadas da sua importancia em estampilhas, vales de correio, ordens, ou lettras de facil cobrança.