PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

GEOMETRIA
NO
ESPAÇO

ILLUSTRADA COM 67 GRAVURAS

SEGUNDO ANNO—SEXTA SERIE

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada,—e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

1882
DAVID CORAZZI, EDITOR
EMPREZA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de ouro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração: 40, R. da Atalaya, 52, Lisboa
Filial no Brazil: 40, R. da Quitanda, Rio de Janeiro

NUMERO
43

CADA VOLUME 50 REIS

INDICE

Introducção 3
Definições preliminares 4
Dos planos e das linhas relativamente aos planos 5
Angulos diedros 13
Angulos solidos 17
Polyedros 21
  Polyedros eguaes 29
  Polyedros similhantes 31
Superficies curvas e solidos redondos 33
  Angulos esphericos 44
  Triangulos esphericos 46
Polyedros inscriptos e circumscriptos á pyramide conica, ao cylindro e á esphera 48
Areas e volumes 52

ERRATAS

Pag.	Linha	Onde se lê	Leia-se
16	21	$C L' O' M$	$C L' O' M'$
30	10	$S A$ com $S A'$	$S A$ com $S' A'$
31	5	*um face*	*uma face*
»	13	*ãos*	*são*
[illegible]	7	$a b$, $c d$, $c d$, $d e$	$a b$, $b c$, $c d$, $d e$
4[illegible]	ultima	neunhm	nenhum

GEOMETRIA NO ESPAÇO

INTRODUCÇÃO

A Geometria, caminhando a par das sublimes conquistas do seculo que atravessamos, vae dia a dia rasgando novos horizontes, firmando novos periodos de revolução, de ingrandecimento e de gloria. Esta sciencia que teve, podemos dizer, o Egypto por berço, firmada em principios puramente practicos, tem desde o phenicio Thales seguidamente a Platão, e d'este até aos nossos dias, inriquecido a sua historia com os nomes de laboriosos e dedicados trabalhadores.

A Geometria moderna principia o seu reinado no meiado do seculo XVI, marcando esta epocha um periodo brilhante na historia d'esta sciencia; tem ella explicado muitos principios que as escolas da antiguidade ignoravam.

A Geometria analytica, a Geometria descriptiva, creada por Monge, são periodos brilhantes da Geometria moderna. Esta sciencia representa no gremio dos conhecimentos humanos um importantissimo logar; é uma pagina sublime da litteratura mathematica.

Euclides, Archimedes e Apollonio (natural do Egypto), foram os vultos que entre as nações antigas mais ingrandeceram a Geometria; crearam os seus alicerces, derramaram os principios, que successivamente cuidados, brilhantemente se reflectem nas phases variadas e bellas de tão bella sciencia.

Abrange esta sciencia um vasto campo de especialidades; trataremos, porêm, da Geometria elementar.

A Geometria elementar comprehende duas partes: *Geometria plana* e *Geometria no espaço*.

A *Geometria plana* tem por objecto o estudo das figuras que apresentam todos os pontos no mesmo plano; a *Geometria no espaço* estuda as propriedades das figuras que não estão n'um mesmo plano.

Estudada, como ficou já, a *Geometria plana*, no vol. XXI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*,—chegado é o ensejo de no presente volume tratarmos da *Geometria no espaço* (para cuja intelligencia, aliás, indispensavel se torna o conhecimento das materias apresentadas no supra-citado volume XXI da collecção).

Esta parte da Geometria elementar procurámos tratal-a com toda a clareza, desbravando o caminho, tornando-o suave e ameno quanto possivel; e, perfeitamente na indole do nosso programma, vão os principios desinvolvidos ao alcance de todas as intelligencias.

DEFINIÇÕES PRELIMINARES

1. *Geometria*.—Pela palavra *Geometria*, derivada de dois vocabulos gregos (*gê*, terra, e *metron*, medida), designa-se a sciencia que trata da extensão.

2. *Extensão* é qualquer porção limitada do espaço. Extensão de um corpo é a porção do espaço occupada por esse corpo.

Corpo ou volume é uma extensão com tres dimensões: comprimento, largura e altura, espessura ou profundidade.

Superficie é uma extensão com duas dimensões: comprimento e largura, ou o limite exterior dos corpos.

Linha é uma extensão com uma só dimensão: comprimento, ou o limite de uma superficie.

Ponto é o logar da extensão que se considera sem dimensão, ou o limite de uma linha.

3. Um ponto, movendo-se no espaço, gera uma linha; uma linha, movendo-se, gera uma superficie; e uma superficie, movendo-se, gera um volume.

4. Distinguem-se tres especies de linhas (*linha recta*, *linha curva*, e *linha quebrada* ou *polygonal*) assim como tres especies de superficies (*superficie plana* ou simplesmente *plano*, *superficie curva*, e *superficie quebrada* ou *polyedrica*).

5. *Figura* se chama em Geometria a todo o espaço terminado por uma ou mais linhas, por uma ou mais superficies.

Dá-se o nome de *theorema* a uma proposição que precisa ser demonstrada; *corollario* a uma consequencia de um theorema; *problema* é uma applicação de um theorema. Os problemas dizem-se *numericos*, quando na sua resolução se empregam numeros; dizem-se *graphicos*, quando se empregam linhas.

Axioma é uma verdade por si mesma evidente, isto é, que não precisa ser demonstrada.

DOS PLANOS E DAS LINHAS RELATIVAMENTE AOS PLANOS

6. Os planos devem ser considerados indefinidamente extensos; porêm, serão representados por um quadrilatero para assim melhor auxiliar o nosso estudo.

7. Uma recta é *perpendicular* sobre um plano, quando é perpendicular a duas rectas existentes no plano, passando pelo pé da perpendicular. Assim a recta AB (fig. 1) é perpendicular ao plano; o ponto B de intersecção da recta com o plano é o *pé* da perpendicular. Reciprocamente o plano é perpendicular á recta.

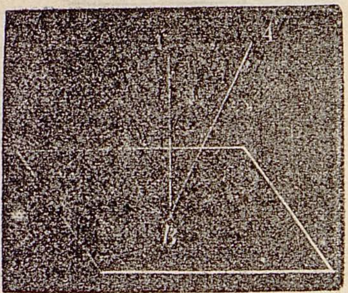


Fig. 1

Toda aquella recta $A'B$ que incontra um plano e não lhe é perpendicular, diz-se *obliqua;* e reciprocamente o plano é obliquo sobre a recta.

8. *Duas rectas parallelas entre si determinam um plano.* Com effeito, sabendo que tres pontos não em linha recta determinam um plano, se tomarmos dois pontos em uma das rectas e um na outra recta, temos determinado o plano.

9. *Por um ponto dado no espaço pode-se conduzir só uma parallela a uma recta,* porque, tomando dois pontos na recta dada e o ponto no espaço, temos determinado o plano, e por este podemos conduzir uma parallela á recta. Qualquer outra recta tirada pelo ponto não pode ser parallela á recta dada,

porque, n'esse caso, haveria dois planos differentes passando pelo ponto e pela recta dada, o que é impossivel. Temos, pois, que um plano fica tambem determinado por duas rectas concorrentes ou parallelas, ou por uma recta e um ponto dado fóra.

10. Duas rectas no espaço, e que prolongadas não se incontram, são *parallelas,* quando estão n'um mesmo plano.

11. Uma recta que, por mais que se prolongue, não incontra um plano, é *parallela* a esse plano, e reciprocamente, o plano é parallelo á recta.

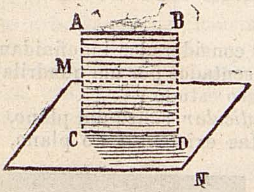


Fig. 2

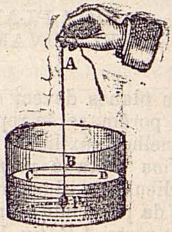


Fig. 3

12. *Uma recta é parallela a um plano quando é parallela a outra recta existente n'esse plano.* Seja a recta AB (fig. 2), parallela á recta CD que existe sobre o plano. As duas rectas estão no plano $ABCD$; se prolongassemos AB e se esta recta incontrasse o plano MN, havia no mesmo ponto de incontrar a sua parallela CD, o que é absurdo; portanto a recta AB é parallela ao plano.

13. Uma linha recta diz-se *vertical* quando segue a direcção do fio de prumo. Um corpo pezado P (fig. 3), suspenso por um fio, constitue o fio de prumo.

14. Todo o plano que passa por uma linha vertical (fig. 4), chama-se *plano vertical; linha* e *plano horizontal* são a recta e o plano perpendiculares á vertical.

15. *Toda a recta que é perpendicular a duas outras rectas existentes n'um plano, é tambem perpendicular a qualquer outra recta conduzida no plano pela intersecção das duas primeiras.* Seja MN o plano (fig. 5), e AB a recta perpendicular ás duas CD e EF; queremos demonstrar que AB é perpendicular a qualquer recta GH conduzida no plano pelo mesmo ponto B. Nas rectas CD e EF faça-se BD egual a BF e

una-se o ponto A com D e F e este ponto com D; teremos, pois, visto serem eguaes os triangulos rectangulos ABD e ABF, AD egual a AF; dividindo ao meio DF pelo ponto L e unindo este ponto com A e B, temos que AL e BL são perpendiculares a DF. Sabemos que, *em um triangulo rectangulo, o quadrado da hypothenusa é egual á somma dos quadrados dos cathetos*; temos, pois, nos triangulos rectangulos ABD e ALD

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$$

e $$\overline{AD}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{LD}^2$$

ou $$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{LD}^2$$

e $$\overline{BD}^2 - \overline{LD}^2 = \overline{AL}^2 - \overline{AB}^2 \ (a);$$

no triangulo rectangulo BLD temos do mesmo modo

$$\overline{BD}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{LD}^2$$

ou $$\overline{BD}^2 - \overline{LD}^2 = \overline{BL}^2$$

d'onde tiramos pela egualdade (a)

$$\overline{BL}^2 = \overline{AL}^2 - \overline{AB}^2$$

ou $$\overline{AL}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{AB}^2$$

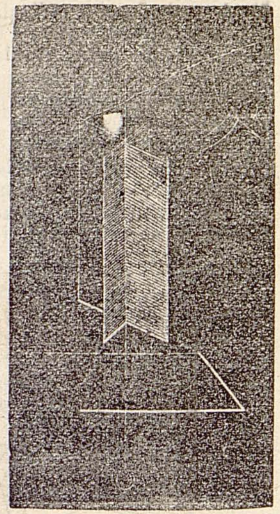


Fig. 4

isto é, o triangulo ABL é rectangulo. Conduzindo no plano MN pelo ponto de intersecção das rectas CD e EF a recta GH até incontrar no ponto H a recta que passa pelos pontos F e D, e unindo esse ponto com A, temos no triangulo rectangulo ALH

$$\overline{AH}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{LH}^2 \ (b)$$

em ABL

$$\overline{AL}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BL}^2 \ (c)$$

e em BLH

$$\overline{BH}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{LH}^2$$

ou $$\overline{LH}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{BL}^2 \ (d)$$

Substituindo na egualdade (b) em logar de $\overline{AL}^2$ e $\overline{LH}^2$ o determinado nas egualdades (c) e (d), temos $\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BH}^2$, o que prova que o angulo ABH é recto, isto é, que AB é perpendicular a GH, como queriamos demonstrar.

16. *Tres rectas perpendiculares a outra recta n'um mesmo*

ponto, estão todas em um mesmo plano. Seja a recta AB (fig. 5), á qual são perpendiculares as rectas BE, BC e BG no ponto B. Sabemos (7) (*) que as rectas BE e BG determinam um plano perpendicular a AB, e existirá tambem n'esse plano a recta BC, porque então BP (intersecção do plano ABC com o determinado pelas rectas BE e BG) seria perpendicular á recta AB no ponto B, pelo que acima acabamos de demonstrar, concluindo que no plano determinado pelas rectas BE e BG haveria duas perpendiculares BP e BC tiradas de um mesmo ponto, á recta AB, o que é absurdo. Portanto, temos demonstrado o theorema, provando que as rectas BE, BC e BG existem no mesmo plano.

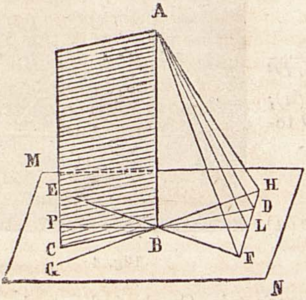


Fig. 5

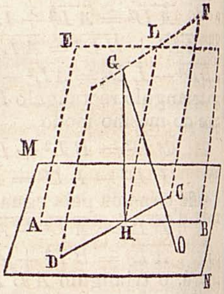


Fig. 6

17. Todo o plano perpendicular a uma recta, é o *logar geometrico* de todas as rectas que no mesmo ponto são perpendiculares a essa recta.

18. *De um ponto dado em um plano, levantar a perpendicular a esse plano.* Seja o plano MN e o ponto H (fig. 6). Tirem-se pelo ponto dado e no plano MN duas rectas AB e CD perpendiculares entre si, e pela primeira d'estas rectas faça-se passar qualquer plano AEB. Pelo ponto H tire-se n'este plano a recta HL perpendicular a AB, e no plano DCF levante-se do mesmo ponto H a recta HG perpendicular a DC; a recta HG é perpendicular ao plano. Visto ser

(*) Os numeros indicados dentro do parenthesis referem-se aos paragraphos justificativos da doutrina que se expõe.

$A B$ perpendicular a $H L$ e a $H C$, será tambem perpendicular a $H G$ que existe no plano $L H C$; mas, como $H G$ é tambem perpendicular a $H C$, concluimos que a recta $H G$ é perpendicular ao plano $M N$.

19. *De um ponto dado fóra de um plano abaixar uma perpendicular a esse plano.* Seja o plano $M N$ e o ponto G (fig. 6). Tirando do ponto G para o plano uma recta $G O$ e fazendo-a girar em-torno do ponto G, descreverá sobre o plano uma circumferencia; determinado o centro H e unindo-o com o ponto G, será a recta $G H$ a perpendicular ao plano. Quer seja o ponto dado no plano, quer seja dado fóra, não é possivel tirar senão uma perpendicular.

20. *A perpendicular baixada de um ponto sobre um plano é menor que qualquer outra recta conduzida do mesmo ponto para o dito plano.* Seja $A B$ a perpendicular ao plano $M N$ (fig 5); qualquer outra recta $A F$, é obliqua sobre a recta $B F$; como sabemos, *a perpendicular baixada de um ponto para uma recta é menor que qualquer obliqua tirada do mesmo ponto para a mesma recta;* segue-se pois que $A B$ é menor que $A F$, o que se pretendia demonstrar.

21. Quando uma recta é a menor que de um ponto se pode conduzir para um plano, a recta é *perpendicular ao plano.*

Distancia de um ponto a um *plano* é a perpendicular baixada d'esse ponto sobre o plano.

22. *Se de um ponto situado fóra de um plano se baixam sobre esse plano a perpendicular e algumas obliquas que se desviam egualmente do pé da perpendicular, são eguaes e fazem com ella angulos eguaes; de duas obliquas que se desviam desegualmente do pé da perpendicular, é maior a que se desvia mais e faz maior angulo com a perpendicular.* Sejam as duas obliquas $A C$ e $A D$ (fig. 7), cujas distancias ($B C$ e $B D$) ao pé da perpendicular $A B$ ao plano $M N$ são eguaes entre si. Sabemos que dois triangulos são eguaes, quando dois lados de um são respectivamente eguaes a dois lados do outro, e eguaes os angulos por elles formados; temos, pois, que os dois triangulos rectangulares $A B C$ e $A B D$ são eguaes, logo $A C$ egual a $A D$ e eguaes tambem os angulos $C A B$ e $D A B$. Sejam agora as obliquas $A E$ e $A C$, cujos pés são

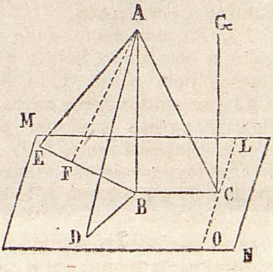


Fig. 7

desegualmente distantes do pé da perpendicular (o que se exprime pela desegualdade $B E > B C$). Teremos n'este caso a obliqua $A E > A C$. Fazendo $B F = B C$, e tirando a obliqua $A F$, temos pelo que acima dissémos $A F = A C$; mas, no plano $A B E$, temos $A E > A F$, porque em duas obliquas a uma recta tiradas do mesmo ponto, se se desviam desegualmente do pé da perpendicular, é maior a que se afasta mais e faz maior angulo com a perpendicular; e, como $A F = A C$, segue-se que $A E > A C$ e portanto o angulo $E A B > C A B$, o que se pretendia demonstrar.

23. *Se uma de duas parallelas fôr perpendicular a um plano, tambem a outra o será.* Sejam $A B$ e $G C$ as rectas parallelas (fig. 7), e $A B$ perpendicular ao plano $M N$; vamos demonstrar que $G C$ é tambem perpendicular ao mesmo plano. Una-se o ponto A com C e por este ponto tire-se a recta $L O$ perpendicular no ponto C á intersecção $B C$ do plano das parallelas com o plano $M N$. Visto ser $A B$ perpendicular a $B C$, será a sua parallela $G C$ perpendicular a $B C$ e tambem perpendicular a $L O$, por ser esta linha perpendicular ao plano $A B C$, onde existe $G C$. Temos pois a recta $G C$ perpendicular ás duas $B C$ e $L O$, isto é, perpendicular ao plano $M N$, onde ellas existem, o que se pretendia demonstrar.

24. *Projecção de um ponto sobre um plano* é o pé da perpendicular baixada d'esse ponto sobre o plano.

Projecção de uma recta é o logar geometrico dos pés das perpendiculares baixadas de todos os pontos da recta sobre o plano.

A projecção de uma recta é uma linha recta, e determina-se pela projecção de quaesquer dois dos seus pontos.

Assim na fig. 8 a recta $a b$ é a projecção de $A B$ sobre o plano $M N$.

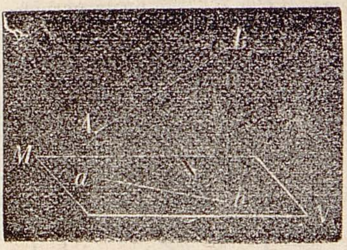


Fig. 8

Dá-se o nome de *plano projectante* o que contêm as perpendiculares baixadas da recta sobre o plano denominado *plano de projecção.*

25. Qualquer recta $A B$ (fig. 9) obliqua ao plano $M N$, tem por medida d'inclinação o angulo que ella fórma com a sua projecção $A b$.

O angulo $B A b$ determinado pela obliqua e pela sua projecção sobre o plano $M N$, é o menor de todos que a mesma obliqua faz com qualquer outra recta existente no plano, conduzida pelo seu pé.

26. *Planos parallelos* são os que nunca se incontram por mais que se prolonguem.

27. *Dois planos perpendiculares a uma recta são parallelos entre si.* Sejam os planos $M N$ e $P Q$ (fig. 10) perpendiculares á recta $A B$, esses planos são os logares geometricos de todas as perpendiculares á mesma recta nos pontos A e B.

Se os planos $M N$ e $P Q$ se incontrassem, e se de um ponto da sua intersecção tirassemos rectas para os pontos A e B, seriam essas rectas perpendiculares a $A B$, o que é absurdo; concluimos, pois, que os planos $M N$ e $P Q$ são parallelos, o que se pretendia demonstrar.

28. *Se um de dois planos parallelos é perpendicular a uma recta, o outro tambem é perpendicular á mesma recta.* Sejam os planos parallelos $M N$ e $P Q$ (fig. 10); se o primeiro plano é

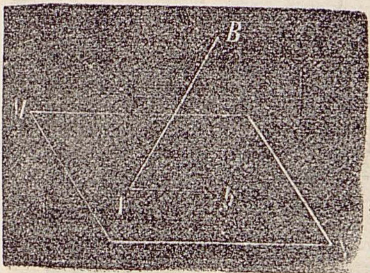


Fig. 9

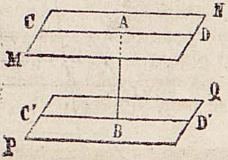


Fig. 10

perpendicular a $A B$, será tambem perpendicular á mesma recta o plano $P Q$. Conduza-se por $A B$ um plano cujos traços nos planos $M N$ e $P Q$, são $C D$ e $C' D'$, que necessariamente são parallelos, porque se o não fossem incontrar-se-hiam em um ponto que seria commum aos planos $M N$ e $P Q$, o que é absurdo, visto serem parallelos.

Por hypothese $C D$ é perpendicular á recta $A B$; e, sendo a primeira d'estas rectas parallela a $C' D'$, será esta tambem perpendicular a $A B$ e portanto o plano $P Q$ perpendicular a $A B$.

29. *Por um ponto dado no espaço tirar um plano parallelo*

a outro. Seja o ponto A e o plano $P\ Q$ (fig. 10); baixando do ponto dado a perpendicular $A\ B$ sobre o plano $P\ Q$ e tirando um plano $M\ N$ perpendicular a $A\ B$, esse plano é parallelo ao plano dado; e não é possivel tirar outro, porque seria então obliquo sobre $A\ B$ e portanto (28) não seria parallelo a $P\ Q$.

30. *Tres ou mais planos parallelos entre si cortam duas rectas em partes proporcionaes.* Sejam $A\ B$ e $C\ D$ as duas rectas (fig. 11), e $M N$, $P\ Q$ e $R\ S$ os tres planos parallelos; será $\frac{A E}{E B} = \frac{C F}{F D}$. Tirando a recta $A\ B'$ parallela a $C D$, será $E\ E'$ parallela a $B\ B'$, logo $\frac{A E}{E B} = \frac{A E'}{E' B'}$ (a); e, como as porções de rectas parallelas comprehendidas entre planos pa-

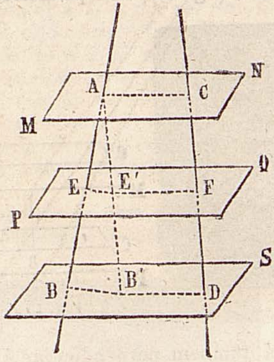


Fig. 11

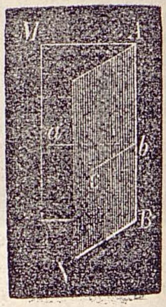


Fig. 12

rallelos são eguaes, temos $A E' = C F$ e $E' B' = F D$; substituindo em (a) teremos $\frac{A E}{E B} = \frac{C F}{F D}$, o que se pretendia demonstrar.

Do theorema que acabamos de demonstrar, se deduz o seguinte corollario: *quaesquer rectas tiradas de um ponto sobre* *um plano, todo o plano parallelo a este as corta em partes proporcionaes.*

ANGULOS DIEDROS

31. Angulo diedro é a inclinação reciproca de dois planos que se cortam. Dá-se o nome de *aresta* á intersecção dos planos, e estes são as *faces* do angulo.

Um angulo diedro designa-se por quatro lettras, collocando as duas da aresta no meio, ou simplesmente pelas duas lettras da aresta, quando esta não é commum a outros angulos; assim (fig. 12) temos o angulo diedro $MABN$ ou o angulo diedro AB. Dois angulos diedros são eguaes quando, ajustadas as suas arestas, cada uma das faces de um dos angulos assenta sobre as faces do outro.

32. *Angulos diedros adjacentes* são os que têem uma face commum e as outras em um só plano. Assim a fig. 13 representa os angulos $MABP$ e $NABP$, que são adjacentes.

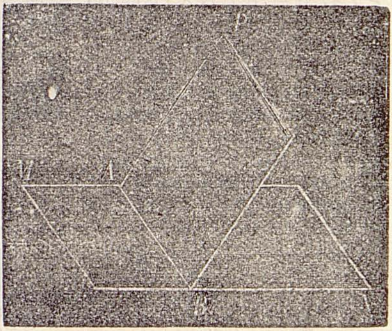


Fig. 13

33. Quando um plano cahindo sobre outro fórma dois angulos diedros adjacentes eguaes, esse plano é perpendicular sobre o outro, e os angulos diedros são *rectos*. A fig. 14 representa dois angulos diedros adjacentes eguaes. Quando um plano cahindo sobre outro fórma dois angulos diedros adjacentes deseguaes (fig. 13), esse plano é obliquo sobre o outro. E os angulos que determina dizem-se: *angulo diedro agudo*, o que é menor que um recto; e *angulo diedro obtuso*, o que é maior que um recto. Assim o angulo $MABP$ é um angulo obtuso, e $NABP$ é um angulo agudo. Estes angulos denominam-se em geral, *angulos obliquos*.

Os angulos que, tendo a mesma aresta, são formados pelo prolongamento das faces um do outro, dizem-se *diedros verticalmente oppostos*.

34. O angulo *a b c* (fig. 12), formado pelas rectas *a b* e *b c*, cada uma em sua face do angulo diedro e perpendiculares no mesmo ponto *b* á aresta *A B*, denomina-se *angulo rectilineo do diedro.*

35. *Plano bissector* de um diedro é o plano que passa pela aresta e divide o angulo em duas partes eguaes.

36. *Todos os angulos diedros rectos são eguaes.* Sejam os planos $P L O$ e $P' L' O'$ (fig. 15) respectivamente perpendiculares aos planos $M N$ e $M' N'$; queremos demonstrar que os angulos diedros rectos $P L O M$, $P L O N$, $P' L' O' M'$ e $P' L' O' N'$, são eguaes. Ajuste-se o plano $M' N'$ com o plano $M N$ de maneira que $L' O'$ coincida com $L O$; o plano $P' L' O'$ coincidirá com o plano $P L O$, porque se tomasse outra direcção $P'' L O$ teriamos $P'' L O N < P'' L O M$; mas $P L O M = P L O N$; e sendo $P'' L O N < P L O N$ e $P'' L O M > P L O M$, o plano $P' L' O'$ não seria perpendicular ao plano $M' N'$ e formaria com elle angulos diedros deseguaes; isto é, $P' L' O' M'$ não seria recto, o que é contra a hypothese. Concluimos pois que o plano $P' L' O'$ coincide com o plano $P L O$ e portanto os angulos são todos eguaes.

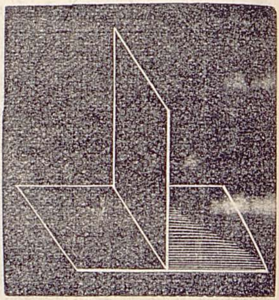


Fig. 14

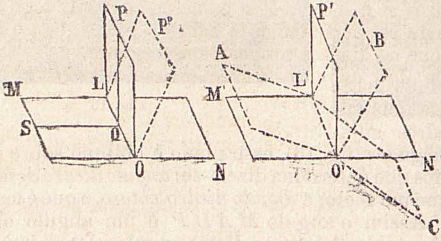


Fig. 15

37. *N'um angulo diedro recto, o seu rectilineo correspondente tambem é recto.* Seja o angulo diedro recto $P L O M$ e o seu

rectilineo $P\,Q\,S$ (fig. 15). Visto ser o plano $P\,L\,O$ perpendicular ao plano $M\,O$, a recta $P\,Q$ perpendicular a $L\,O$ será tambem perpendicular ao plano $M\,O$ e portanto a $Q\,S$, d'onde concluimos que é recto o angulo $P\,Q\,S$, o que se desejava demonstrar.

38. *Dois angulos diedros são eguaes quando são eguaes os seus rectilineos correspondentes.* Sejam os rectilineos eguaes

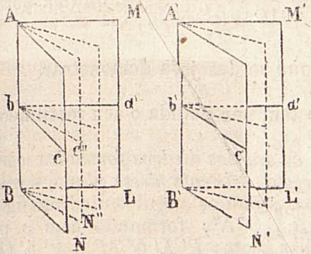


Fig. 16

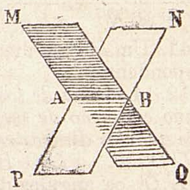


Fig. 17

$a\,b\,c''$ e $a'\,b'\,c'$ (fig. 16) correspondentes aos angulos diedros $M A B N''$ e $M'\,A'\,B'\,N'$. Ajustando os diedros pelas suas arestas, de maneira que o ponto b' coincida com o ponto b, e ajustando a face $A'\,N'$ sobre $A\,N''$, $b'\,c'$ coincidirá com $b\,c''$, visto os angulos $A'\,b'\,c'$ e $A\,b\,c''$ serem rectos e portanto eguaes; os dois planos $a'\,b'\,c'$ e $a\,b\,c''$ coincidirão, visto serem respectivamente perpendiculares a $A'\,B'$ e $A\,B$; e, sendo eguaes os angulos $a'\,b'\,c'$ e $a\,b\,c''$, $b'\,a'$ coincide com $b\,a$; logo o plano $A'\,L'$ ajusta-se perfeitamente sobre o plano $A\,L$, o que demonstra que os diedros propostos são eguaes.

39. *Em dois angulos diedros eguaes, os rectilineos correspondentes são tambem eguaes.* Sejam os diedros eguaes $M A B N'$ e $M'\,A'\,B'\,N'$ (fig. 16); ajustando-os de modo que o ponto b' assente sobre o ponto b, os angulos rectilineos $a'\,b'\,c'$ e $a\,b\,c''$ coincidirão, visto estarem n'um mesmo plano perpendicular ás arestas, o que demonstra o theorema.

40. *Os angulos diedros são proporcionaes aos seus angulos rectilineos correspondentes.* Sejam os angulos diedros $M\,A\,B\,N$ e $M'\,A'\,B'\,N'$ (fig. 16), e os rectilineos correspondentes $a\,b\,c$ e $a'\,b'\,c'$; pretende-se demonstrar que $\dfrac{M\,A\,B\,N}{M'\,A'\,B'\,N'} = \dfrac{a\,b\,c}{a'\,b'\,c'}$.

Supponhamos que o angulo tomado por unidade se contêm tres vezes no primeiro angulo e duas no segundo; teremos, pois, $\frac{a\,b\,c}{a'\,b'\,c'} = \frac{3}{2}$ (a); fazendo passar planos pelas arestas dos angulos diedros e pelas divisões dos seus rectilineos, ficam determinados em $M\,A\,B\,N$ tres angulos e em $M'\,A'\,B'\,N'$ dois, todos eguaes, d'onde $\frac{M\,A\,B\,N}{M'\,A'\,B'\,N'} = \frac{3}{2}$ ou (a); portanto $\frac{M\,A\,B\,N}{M'\,A'\,B'\,N'} = \frac{a\,b\,c}{a'\,b'\,c'}$, o que se desejava demonstrar.

41. Um angulo diedro tem por medida o seu rectilineo correspondente.

42. *A somma de todos os angulos diedros formados sobre um plano em-torno de uma recta, existente n'esse plano, é egual a dois angulos diedros rectos.* Sejam os angulos diedros (fig. 15), $A\,L'\,O'\,M'$, $A\,L'\,O'\,B$, $B\,L'\,O'\,N'$; formando com o plano $P'\,L'\,O'$ os angulos diedros rectos $P'\,L'\,O'\,M'$ e $P'\,L'\,O'\,N'$, a somma dos angulos diedros dados vale dois rectos, porque é egual á dos angulos $P'\,L'\,O'\,M'$ e $P'\,L'\,O'\,N'$, o que se desejava demonstrar.

43. *A somma de todos os angulos diedros formados no espaço em-torno de uma recta, é egual á somma de quatro diedros rectos.* Sejam os angulos diedros $A\,L'\,O'\,M'$, $A\,L'\,O'\,B$, $B\,L'\,O'\,C$ e $C\,L'\,O'\,M'$ (fig. 15); prolongando o plano $M'\,L'\,O'$ sabemos que a somma de todos os angulos diedros formados em-torno de $L'\,O'$ para a parte superior do plano $M'\,N'$ vale dois rectos (42), assim como a dos formados para a parte inferior; portanto a somma de todos os angulos dados vale quatro diedros rectos.

44. *Os angulos diedros verticalmente oppostos são eguaes.* Sejam os angulos diedros verticalmente oppostos $M\,A\,B\,N$ e $P\,A\,B\,Q$ (fig. 17); temos que $P\,A\,B\,Q + N\,A\,B\,Q =$ dois angulos diedros rectos (42), e $M\,A\,B\,N + N\,A\,B\,Q =$ dois angulos diedros rectos; se a estas sommas tirarmos o diedro commum $N\,A\,B\,Q$, os restos ficarão eguaes, isto é, $P\,A\,B\,Q = M\,A\,B\,N$, o que se desejava demonstrar.

45. Os angulos diedros cuja somma for egual a dois rectos, são *supplementares*; e, se for egual a um recto, são *complementares*. Os angulos diedros eguaes têem supplementos ou complementos eguaes. Reciprocamente os angulos diedros que têem supplementos ou complementos eguaes, são eguaes.

46. *O plano bissector de um angulo diedro é o logar geometrico de todos os pontos do espaço equidistantes das faces do mesmo angulo.* Seja o angulo diedro $MABN$ (fig. 18), e AHB o plano bissector; tirando por qualquer ponto O da aresta AB um plano perpendicular á mesma aresta, OG, OL e OH são os traços d'esse plano sobre as faces e sobre o plano bissector. Os angulos rectilineos GOH e HOL são eguaes entre si (39), e OH é a bissectriz do angulo GOL. Do ponto C tirem-se as perpendiculares CD e CE ás faces do angulo diedro que passam pelos traços OG e OL; evidentemente as perpendiculares são eguaes, visto ser OH a bissectriz do rectilineo do diedro, d'onde concluimos que as distancias de qualquer ponto C do plano bissector ás faces do angulo dado são eguaes. Facilmente se demonstraria que qualquer ponto situado fóra do plano bissector, não está egualmente distante das faces do angulo, porque conduzindo um plano perpendicular á aresta do diedro (como acima fizemos), o ponto não existirá na bissectriz do rectilineo do diedro; d'onde se conclue o que se desejava demonstrar.

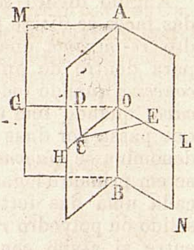


Fig. 18

47. Tres pontos, não em linha recta, equidistantes das faces de um angulo diedro, determinam um plano que é o bissector do diedro.

48. Dois planos parallelos cortados por um terceiro, formam differentes angulos que têem as seguintes denominações: angulos externos e internos do mesmo lado do plano seccante, correspondentes, alternos-externos e alternos-internos. Facilmente se demonstram, pela relação que existe entre os angulos diedros e os seus rectilineos correspondentes, os seguintes principios: —*dois angulos diedros que têem as faces parallelas são eguaes ou supplementos; dois angulos diedros, quando as faces de um são respectivamente perpendiculares ás faces do outro, e as arestas parallelas, são eguaes ou supplementos.*

ANGULOS SOLIDOS

49. *Angulo solido ou angulo polyedro* é a figura determinada por tres ou mais planos que se interceptam dois a dois,

formando angulos diedros que se incontram n'um ponto chamado *vertice*.

Os planos que formam o angulo solido denominam-se *faces*, e a intersecção de dois planos chama-se *aresta*.

Angulo diedro *saliente*, é aquelle em que o prolongamento das faces se dirige para fóra do angulo solido; e angulo diedro *re-intrante*, quando o prolongamento das faces se dirige para dentro do angulo. O angulo solido ou polyedro diz se *convexo*, quando todos os angulos diedros são salientes; e *concavo*, quando tem um ou mais angulos re-intrantes. O plano que passa por duas arestas não determinadas na mesma face, denomina-se *diagonal*. Um angulo solido ou polyedro designa-se em primeiro logar pela lettra do vertice, e em seguida por cada uma das lettras pertencentes ás suas arestas. Angulo solido ou polyedro *regular* é o que tem todas as faces eguaes entre si, assim como os angulos diedros. Um angulo solido tem tantos angulos diedros quantas são as suas faces. O angulo solido, se tem tres faces, denomina-se *triedro;* se quatro, *tetraedro;* se cinco, *pentaedro*, etc. O angulo triedro segundo tem um, dois ou tres angulos planos rectos, diz-se rectangulo, bi-rectangulo ou tri-rectangulo. Angulos triedros verticalmente oppostos dizem-se quando, tendo o mesmo vertice, as arestas de um estão na mesma direcção que as arestas do outro.

50. *N'um angulo triedro, qualquer das faces é menor que a somma das outras duas e maior que a sua differença.* Seja o triedro $A\,B\,C\,D$ (fig. 19) e $C\,A\,B$ a maior das suas faces; tome-se n'ella $C\,A\,E = C\,A\,D$ (a) e fazendo $A\,E = A\,D$ unam-se os pontos B, C e D. Sabemos que, n'um triangulo, qualquer lado é menor que a somma dos outros dois; temos pois no triangulo $B\,D\,C$, $B\,D + D\,C > B\,E + E\,C$; mas visto ser $D\,C = C\,E$ por serem eguaes os triangulos $E\,A\,C$ e $D\,A\,C$, será $B\,D > B\,E$, e portanto o angulo $D\,A\,B >$ $> E\,A\,B$ (b). Addicionando, aos membros da deseguualdade (b), $C\,A\,D = C\,A\,E$ (a), temos:

$$D\,A\,B + C\,A\,D > E\,A\,B + C\,A\,E$$

$$\text{ou } D\,A\,B + C\,A\,D > C\,A\,B \quad (c)$$

Visto serem as duas faces do triedro $D\,A\,B$ e $C\,A\,D$ menores que $C\,A\,B$, temos:

$$C\,A\,B + C\,A\,D > D\,A\,B \quad (d)$$

$$\text{e} \quad C\,A\,B + D\,A\,B > C\,A\,D \quad (e)$$

o que demonstra a primeira parte do theorema. A segunda parte facilmente se conclue das deseguualdades (c), (d) e (e), d'onde tiramos:

$$DAB > CAB - CAD$$
$$CAD > DAB - CAB$$
$$CAB > CAD - DAB$$

como se pretendia demonstrar.

51. *A somma das faces de um angulo polyedro convexo é menor que quatro angulos rectos.* Seja o angulo polyedro convexo $ABCDE$ (fig. 20); pretende-se demonstrar que $BAC + CAD + DAE + EAB < 4r$ (*). Cortam-se com um pla-

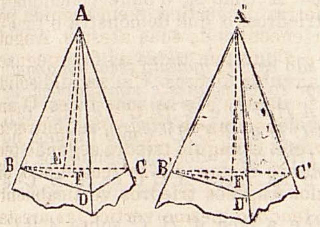


Fig. 19

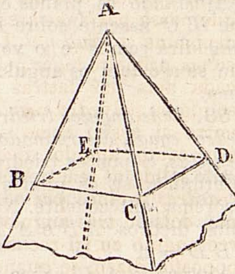


Fig. 20

no $BCDE$ as arestas do angulo polyedro; e nos angulos triedros cujos vertices são B, C, D e E teremos (50)

$$ABC + ABE > EBC$$
$$ACB + ACD > BCD$$
$$ADC + ADE > CDE$$
$$AED + AEB > DEB$$

Sommando todos os angulos, e separando os que pertencem a cada triangulo, temos:

$$(ABC + ACB) + (ACD + ADC) + (AED + ADE) + (ABE + AEB) > EBC + BCD + CDE + DEB$$

e, como sabemos que a somma dos angulos, $EBC + BCD + CDE + DEB = 4r$, a somma dos supplementos dos dois angulos de cada triangulo (face do triedro), isto é, $BAC + CAD + DAE + EAB$, será menor que quatro angulos rectos, o que se desejava demonstrar.

52. *Dois angulos triedros são eguaes, quando as faces de um são respectivamente eguaes ás faces do outro e similhante-*

(*) A lettra r depois do algarismo, designa que são tantos angulos rectos quantos o algarismo indica.

mente dispostas. Sejam os angulos triedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ (fig. 19); faça-se passar um plano pelos pontos B, C e D, e outro pelos pontos B', C' e D', de modo que determinem $AB = AC = AD = A'B' = A'C' = A'D'$.

Baixaremos dos pontos A e A' as perpendiculares AF e $A'F'$ sobre os planos BCD e $B'C'D'$, que são eguaes, assim como $BF = B'F'$, visto serem respectivamente eguaes as faces dos triedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$; teremos portanto eguaes as perpendiculares AF e $A'F'$.

Ajustando os planos eguaes BCD e $B'C'D'$ de maneira que $B'C'$ assente sobre BC e $B'D'$ sobre BD, o ponto F' coincidirá com F e o vertice A' com A, d'onde concluimos que se ajustam os angulos triedros, o que demonstra o theorema.

53. *Dois angulos triedros são eguaes quando têem um angulo diedro egual, determinado por faces eguaes e similhantemente dispostas.* Sejam os triedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ (fig. 19); determinem-se os planos BCD e $B'C'D'$ como fizemos no theorema antecedente. Nos triedros dados são eguaes os angulos diedros AB e $A'B'$ e as faces $ABC = A'B'C'$ e $ABD = A'B'D'$.

Ajustando $A'B'$ sobre AB e a face $A'B'C'$ sobre ABC, evidentemente coincidirá tambem a face $A'B'D'$ com ABD, visto serem eguaes os diedros AB e $A'B'$; portanto $A'D'C'$ ajustar-se-ha com ADC, d'onde concluimos que os triedros se ajustam perfeitamente, o que demonstra o theorema.

Facilmente por sobreposição se demonstrava o seguinte caso de egualdade de triedros: *Dois triedros são eguaes quando têem dois angulos diedros eguaes, adjacentes a uma face egual e similhantemente disposta.*

54. *O numero de diagonaes de um angulo solido, tiradas com a condição de não se cortarem, é egual ao numero das faces menos tres, ficando o angulo solido dividido em tantos triedros quantas são as suas faces menos duas.* Seja o angulo solido $ABCDEF$ (fig. 21), e cortem-se as suas arestas por um plano, como acima fizemos, e seja esse plano $BCDEF$ e CE e CF os traços das diagonaes do angulo solido tiradas com a condição de não se cortarem. Designando por n o numero de faces do angulo, vamos provar que o numero de diagonaes é $n - 3$, e o numero de triedros em que o angulo fica dividido é $n - 2$.

Como se vê na figura, temos diagonaes para todas as arestas menos para AB e AD; e, como o numero das arestas é egual ao numero de faces, temos que o numero de diagonaes é egual a $n-3$; e, como cada diagonal é commum a dois triedros, o numero d'estes será o numero de diagonaes mais um, ou $n-2$, o que se desejava demonstrar.

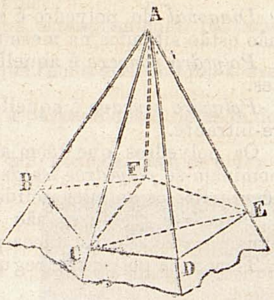


Fig. 21

55. *Em qualquer angulo triedro a intersecção dos planos bissectores de dois angulos diedros, é o logar geometrico de todos os pontos do espaço equidistantes das faces d'esses diedros.* Sabemos que o plano bissector de um angulo diedro é o logar geometrico de todos os pontos do espaço equidistantes das faces do mesmo angulo (46), temos pois que a intersecção dos dois planos bissectores será uma linha indefinida que terá todos os seus pontos equidistantes das faces dos dois angulos diedros, o que se desejava demonstrar.

POLYEDROS

56. *Polyedro* é o solido limitado em todos os sentidos por superficies planas. As superficies que limitam os polyedros são *faces;* a intersecção de suas faces, *aresta;* o ponto commum a tres ou mais arestas, *vertice.* O menor numero de planos que podem fechar um espaço são quatro, portanto o polyedro limitado por quatro faces é o mais simples.

Os polyedros classificam-se, segundo o numero de faces pelo modo seguinte:

Polyedro	de	4	faces	— Tetraedro
»	de	5	»	— Pentaedro
»	de	6	»	— Hexaedro ou cubo
»	de	7	»	— Heptaedro
»	de	8	»	— Octaedro
»	de	9	»	— Enneaedro
»	de	10	»	— Decaedro
»	de	11	»	— Endecaedro
»	de	12	»	— Dodecaedro
»	de	15	»	— Quindecaedro ou pentadecaedro
»	de	20	»	— Icosaedro

Diagonal do polyedro é a recta que une dois vertices que não estão situados na mesma face.

Polyedro convexo é aquelle cujas arestas são todas salientes.

Polyedro concavo é aquelle em que algum angulo solido é re-intrante.

Os polyedros que têem as faces todas eguaes entre si denominam-se *polyedros isoedros;* e *polyedros equiangulos,* os que têem todos os angulos solidos eguaes entre si.

Polyedros regulares são os que têem os angulos solidos eguaes entre si e por faces polygonos regulares eguaes.

Temos os polyedros regulares (fig. 22): o *tetraedro (A),* o

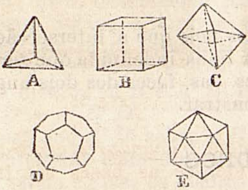


Fig. 22

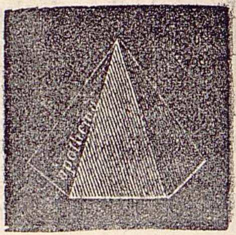


Fig. 23

hexaedro (B), o *octaedro (C),* o *dodecaedro (D)* e o *icosaedro (E).*

O tetraedro é limitado por quatro triangulos equilateros, o hexaedro por seis quadrados, o octaedro por oito triangulos equilateros, o dodecaedro por doze pentagonos regulares e o icosaedro por vinte triangulos equilateros.

Nos polyedros irregulares temos a pyramide e o prisma.

57. *Pyramide* é um solido que tem por *base* um polygono qualquer, e cujas *faces* lateraes são triangulos que concorrem n'um ponto que se denomina *vertice* da pyramide. As arestas communs a duas faces denominam-se *arestas lateraes;* e as que são communs á base e a uma das faces, *arestas da base.*

Denomina-se *eixo* da pyramide a recta tirada do vertice para o centro da base; se o eixo é perpendicular, a pyramide é recta.

Pyramide regular (fig. 23) é a que tem por base um polygono regular, e cujo eixo é perpendicular sobre o plano da base.

As pyramides regulares são rectas.

Apothema da pyramide (fig. 23) é a perpendicular baixada do vertice sobre um lado da base.

Pyramide obliqua (fig. 24) é a que tem o eixo obliquo sobre o plano da base.

Altura da pyramide (fig. 24) é a perpendicular baixada do vertice sobre a base.

Segundo o numero de lados do polygono da base se classi-

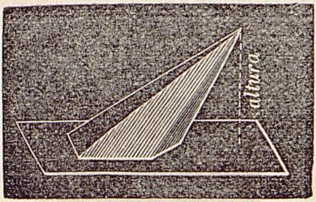


Fig. 24

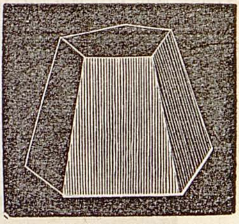


Fig. 25

ficam as pyramides. Assim dizem-se *triangulares, quadrangulares, pentagonaes, hexagonaes,* etc., se as bases são trian-

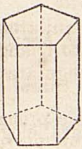


Fig. 26

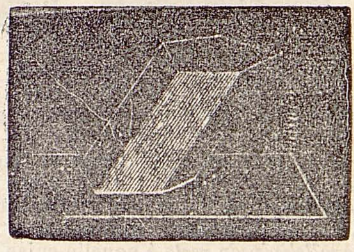


Fig. 27

gulos, quadrilateros, pentagonos, hexagonos, etc. Uma pyramide designa-se lendo primeiramente o vertice e depois a base.

Pyramide troncada (fig. 25) é a porção da pyramide comprehendida entre a base e um plano parallelo ou obliquo á mesma base.

58. *Prisma* (fig. 26) é o polyedro com duas *bases* que são dois polygonos eguaes e parallelos, e cujas *faces* lateraes são parallelogrammos.

Eixo de um prisma é a perpendicular tirada entre os centros das bases do prisma.

Altura do prisma (fig. 27) é a perpendicular tirada de uma das bases sobre o plano da outra base.

Aresta é a intersecção de duas faces. Como a pyramide, o prisma tem arestas lateraes e arestas da base.

Prisma recto (fig. 26) é aquelle cujas arestas lateraes são perpendiculares ás bases; e *obliquo* (fig. 27), o que está no caso contrario.

Prisma regular é o prisma recto cujas bases são polygonos regulares. As bases dos prismas podem ser triangulos, quadrilateros, pentagonos, hexagonos, heptagonos, etc.; assim o

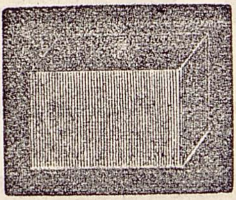


Fig. 28

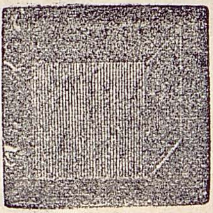


Fig. 29

prisma será *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, *hexagonal*, *heptagonal*, etc.

Nos prismas quadrangulares distingue-se o parallelipipedo.

Parallelipipedo é o prisma cujas bases são parallelogrammos.

Parallelipipedo recto é aquelle cujas faces lateraes são rectangulos.

Parallelipipedo rectangulo (fig. 28) é aquelle cujas faces são todas rectangulos.

Cubo ou *hexaedro regular* (fig. 29) é o parallelipipedo rectangulo cujas arestas são todas eguaes entre si.

Rhomboedro é o solido determinado por seis rhombos.

Prisma troncado (fig. 30) é a porção do prisma comprehendida entre uma base e um plano não parallelo a ella. A superficie lateral de um prisma denomina-se superficie prismatica.

59. *As faces de uma pyramide regular são triangulos isosceles eguaes entre si.* Seja a pyramide hexagonal regular (fig. 31); visto ser VO perpendicular ao meio da base, e sendo os raios da base AO, BO, CO, DO, EO e FO, todos eguaes, temos que as arestas lateraes da pyramide são todas eguaes (22), e portanto as faces são triangulos isosceles e eguaes por serem os lados de cada um respectivamente eguaes aos lados dos outros, o que se desejava demonstrar.

Facilmente se demonstrava com o auxilio do mesmo principio (22) que os apothemas de uma pyramide regular são eguaes.

60. *A secção feita n'uma pyramide por um plano parallelo á base é um polygono similhante á mesma base.* Seja a pyramide $VABCDEF$ (fig. 31), e $abcdef$ a secção feita na py-

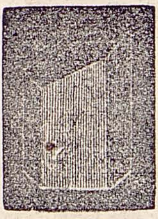


Fig. 30

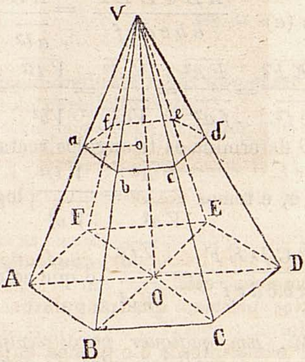


Fig. 31

ramide parallela á base; deseja-se demonstrar que o polygono $abcdef$ é similhante a $ABCDEF$.

Visto serem os lados d'estes polygonos respectivamente parallelos, serão os seus angulos eguaes, isto é, o angulo $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, etc., e os seus lados estão entre si em proporção, pois comparando os triangulos similhantes AVB e aVb, BVC e bVc, CVD e cVd, DVE e dVe, EVF e eVf, FVA e fVa, temos

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BV}{bV'},\ \frac{BV}{bV}=\frac{BC}{bc}=\frac{CV}{cV'};$$

$$\frac{CV}{cV}=\frac{CD}{cd}=\frac{DV}{dV'},\ \text{etc., d'onde tiramos}$$

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de},\ \text{etc., d'onde concluimos que os}$$

polygonos são similhantes, o que se desejava demonstrar.

61. *Cortando uma pyramide por planos parallelos á base, as áreas das secções feitas por esses planos são proporcionaes aos quadrados das distancias do vertice da pyramide a essas secções.* Seja a pyramide $VABCDEF$ (fig. 31); como sabemos, as áreas de dois polygonos similhantes são proporcionaes aos quadrados dos seus lados homologos; temos pois

que (a) $$\frac{ABCDEF}{abcdef}=\frac{\overline{AB}^2}{ab^2}=\frac{\overline{BC}^2}{bc^2}=\frac{\overline{CD}^2}{cd_2}=\frac{\overline{DE}^2}{de^2}=$$

$$=\frac{\overline{EF}^2}{ef^2}=\frac{\overline{FA}^2}{fa^2}=\frac{\overline{VA}^2}{Va^2}=\frac{\overline{VB}^2}{Vb^2}=\frac{\overline{VC}^2}{Vc^2}\ \text{etc.}$$ A perpendicular VO determina os triangulos rectangulos similhantes VOA e Voa, e temos $\frac{\overline{VA}^2}{Va^2}=\frac{\overline{VO}^2}{Vo^2}$; logo (a)

$$\frac{ABCDEF}{abcdef}=\frac{\overline{VO}^2}{Vo^2}$$ o que se desejava demonstrar.

62. *Em qualquer parallelipipedo as faces oppostas são eguaes e parallelas entre si: as diagonaes cortam-se ao meio no mesmo ponto, que é o centro do parallelipipedo.* Seja o parallelipipedo (fig. 32), e consideremos as duas faces AG e DH, que se demonstra serem eguaes visto ser $AB=DC$, $AF=DE$ e o angulo $EDC=FAB$; e, como a aresta AB é parallela a DC e AF parallela a DE, concluimos que as duas faces são parallelas. Para demonstrarmos a segunda parte do theorema, tirem-se as diagonaes AH, BE, CF e DG; as duas diagonaes AH e DG são do parallelogrammo $ADHG$, cortam-se portanto no ponto O em partes eguaes; do mesmo modo as diagonaes AH e BE do parallelogrammo

$ABHE$ cortam-se tambem no ponto O em partes eguaes, assim como as diagonaes BE e CF do parallelogrammo $BCEF$; d'onde concluimos que as diagonaes do parallelipipedo se cortam em partes eguaes. O ponto O é o centro do

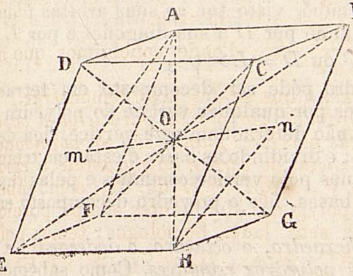


Fig. 32

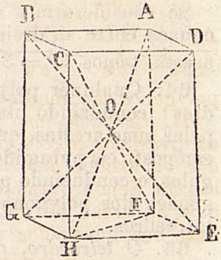


Fig. 33

parallelipipedo ; divide ao meio qualquer recta que passe por elle e termine na superficie do parallelipipedo.

Seja a recta mn que passa pelo ponto O, temos que será $Om = On$; temos que os triangulos AOm e HOn são eguaes entre si, visto ser $AO = OH$ e os angulos $OAm = = OHn$ e $AOm = HOn$; portanto $Om = On$, o que se desejava demonstrar.

Qualquer plano que corta as faces oppostas de um parallelipipedo determina um parallelogrammo.

63. *O quadrado da diagonal de um parallelipipedo rectangulo é egual á somma dos quadrados das tres arestas do parallelipipedo, e as diagonaes são todas eguaes.* Temos o parallelipipedo rectangulo (fig. 33); os seus angulos solidos são triedros tri-rectangulos, portanto cada uma das suas arestas é perpendicular aos planos das que lhe são contiguas; os quadrilateros $ADHG$, $DCGF$ e $ABHE$ são rectangulos, d'onde concluimos que $AH = DG$, $DG = CF$ e $AH = BE$; logo $AH = DG = CF = BE$, isto é, as diagonaes do parallelipipedo são todas eguaes.

Considerando o triangulo rectangulo AFH, sabemos que o quadrado da hypothenusa é egual á somma dos quadrados dos cathetos, isto é, $\overline{AH}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FH}^2$ (a), e no triangulo rectangulo FEH temos

$\overline{FH}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{EH}^2$ portanto (a)

$\overline{AH}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{EH}^2$ e visto ser

$EH = FG$ temos

$\overline{AH}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{FG}^2$ o que se desejava demonstrar.

Se considerarmos o cubo, visto ter as suas arestas todas eguaes entre si, designando por D a sua diagonal e por L a aresta, temos $D^2 = 3L^2$ ou $D = L \times \sqrt{3}$

64. Qualquer polyedro póde ser decomposto em tetraedros: conduzindo planos por qualquer vertice do polyedro e pelas suas arestas, que não determinam este vertice, fica decomposto em pyramides; e dividindo as bases d'estas em triangulos, e conduzindo planos pelo vertice commum e pelas diagonaes dos polygonos bases, fica o polyedro decomposto em tetraedros.

65. *O tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro são os unicos polyedros regulares.* Como sabemos, podemos formar com triangulos equilateros angulos polyedros regulares de tres, quatro e cinco faces, determinando depois o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, que são polyedros regulares; porêm, não se podem determinar angulos polyedros com seis triangulos equilateros, porque tendo um angulo de um triangulo equilatero 60^0, teriamos $60^0 \times 6 = 360^0$, isto é, quatro angulos rectos, o que não pode ser (51), visto que a somma das faces de um angulo polyedro convexo é menor que quatro angulos rectos. Com mais de tres quadrados não se podem determinar angulos polyédros; do mesmo modo se não podem determinar com mais de tres pentagonos regulares, visto que cada angulo do pentagono regular é egual a 108^0 e $108^0 \times 4 > 360^0$, isto é, $>$ que quatro angulos rectos, o que se torna impossivel (51). Pelo que dissémos se vê que com outros polygonos não se podem determinar angulos polyedros, concluindo que: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, com as faces triangulares e os angulos solidos triedros, tetraedros e pentaedros; o hexaedro, cujas faces são quadrilateros e os angulos solidos triedros; o dodecaedro, com as faces pentagonaes e os angulos solidos triedros, são os cinco polyedros regulares que ha.

66. *Nos polyedros regulares ha um ponto interior equidistante dos vertices e das faces.* Sejam $IDC\ldots$ e $ABCDE$ (fig. 34) as duas faces contiguas de um polyedro regular; levantem-se ao meio d'ellas as perpendiculares FO e LO, e pelos pontos L e F baixem-se as perpendiculares LG e FG sobre

a aresta $D\,C$, as quaes determinam o plano $F\,G\,L$, perpendicular á mesma aresta onde existem as perpendiculares $F\,O$ e $L\,O$, que se cortam n'um ponto O, que será equidistante dos vertices das faces $I\,D\,C\ldots$ e $A\,B\,C\,D\,E$. Se considerarmos outras faces contiguas $K\,E\,A\ldots$ e $A\,B\,C\,D\,E$, levantando a perpendicular $M\,O$ e baixando pelos pontos F e M as perpendiculares $F\,H$ e $M\,H$ sobre a aresta $A\,E$, evidentemente a perpendicular $M\,O$ cortará as outras no mesmo ponto O, porque os quadrilateros $F\,G\,L\,O$ e $F\,H\,M\,O$ são eguaes, visto ser $L\,G = F\,G = F\,H = M\,H$, rectos os angulos $O\,M\,H$, $O\,F\,H$, $O\,L\,G$ e $O\,F\,G$ e eguaes os angulos $F\,G\,L$ e $M\,H\,F$. Portanto o ponto O dista egualmente dos vertices das faces $K\,E\,A\ldots$, $A\,B\,C\,D\,E$ e $I\,D\,C\ldots$; assim como de todos os outros vertices do polyedro, o que se demonstrava do mesmo modo.

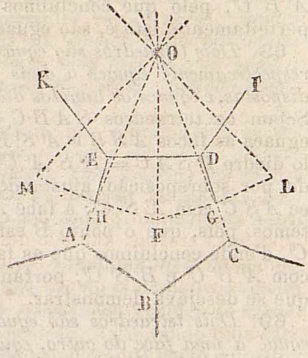


Fig. 34

Para demonstrarmos que o ponto O está equidistante das faces, temos que os triangulos $O\,L\,G$, $O\,F\,G$, $O\,F\,H$ e $O\,M\,H$ são rectangulos e eguaes, portanto $O\,L = O\,F = O\,M$, o que se desejava demonstrar.

67. Polyedros eguaes.—*Dois tetraedros são eguaes quando têem tres faces respectivamente eguaes e similhantemente dispostas.* Sejam os dois tetraedros $S\,A\,B\,C$ e $S'\,A'\,B'\,C'$ (fig. 35); e sejam as faces $A\,S\,B$ e $A'\,S'\,B'$; $B\,S\,C$ e $B'\,S'\,C'$; $A\,S\,C$ e $A'\,S'\,C'$, eguaes e similhantemente dispostas; vamos demonstrar que os dois tetraedros são eguaes. Visto serem eguaes as faces $A\,S\,B$ e $A'\,S'\,B'$, e $B\,S\,C$ e $B'\,S'\,C'$, etc., temos (52) que os triedros S e S' são eguaes; ajustando o primeiro triedro com o segundo, a face $A\,S\,B$ coincidirá com $A'\,S'\,B'$, e $B\,S\,C$

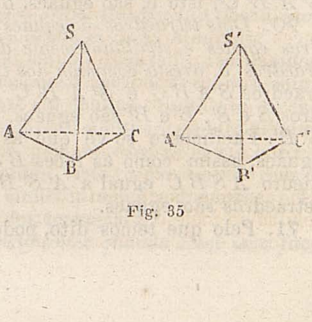


Fig. 35

com $B' S' C'$ e $C S A$ com $C' S' A'$, e portanto $A B C$ com $A' B' C'$, pelo que concluimos que os tetraedros se ajustam perfeitamente, isto é, são eguaes.

68. *Dois tetraedros são eguaes quando duas faces de um são respectivamente eguaes a duas faces do outro, similhantemente dispostas, e eguaes os angulos diedros formados por essas faces.* Sejam os tetraedros $S A B C$ e $S' A' B' C'$ (fig. 35), e sejam eguaes as faces $A S B$ e $A' S' B'$, $A S C$ e $A' S' C'$, e o angulo diedro $B S A C = B' S' A' C'$. Demonstra-se do mesmo modo por sobreposição, ajustando a aresta $S A$ com $S A'$, a face $A S C$ com $A' S' C'$; a face $A S B$ coincidirá com $A' S' B'$; temos, pois, que o ponto B está assente sobre B', e C sobre C', d'onde concluimos que as faces $A B C$ e $B S C$ se ajustam com $A' B' C'$ e $B' S' C'$; portanto os tetraedros são eguaes, o que se desejava demonstrar.

69. *Dois tetraedros são eguaes quando uma face de um é egual a uma face do outro, eguaes e similhantemente dispostos os tres angulos diedros adjacentes a essas faces.* Sejam os tetraedros $S A B C$ e $S' A' B' C'$ (fig. 35): a face $A S C$ é egual a $A' S' C'$, e são eguaes e similhantemente dispostos os angulos diedros $B S A C$ e $B' S' A' C'$; $B S C A$ e $B' S' C' A'$; $B C A S$ e $B' C' A' S'$. Demonstra-se egualmente por sobreposição, ajusta-se a face $A S C$ com $A' S' C'$; e, visto serem eguaes os angulos diedros $B S A C$ e $B' S' A' C'$, a face $B S A$ assentará sobre o plano da face $B' S' A'$, achando-se o ponto B sobre este plano. Do mesmo modo, visto serem eguaes os angulos diedros $B S C A$ e $B' S' C' A'$, a face $B S C$ assentará sobre o plano da face $B' S' C'$, achando-se tambem o ponto B sobre este plano. E, pela egualdade dos diedros $B C A S$ e $B' C' A' S'$, a face $B A C$ assentará sobre $B' A' C'$, pelo que concluimos que, achando-se o ponto B tambem sobre este plano, elle coincide com B'; logo, todas as faces do tetraedro $S A B C$ ajustam-se perfeitamente com as faces do tetraedro $S' A' B' C'$, isto é, são eguaes, o que se desejava demonstrar.

70. *Dois tetraedros são eguaes quando têem dois angulos triedros eguaes e similhantemente dispostos, e é egual nos dois tetraedros a aresta commum aos triedros.* Considerem-se os tetraedros $S A B C$ e $S' A' B' C'$ (fig. 35), nos quaes os triedros S e S', B e B' são eguaes, assim como as arestas $S B$ e $S' B'$. Facilmente se vê que as faces $A S B$ e $A' S' B'$ são eguaes, assim como as faces $B S C$ e $B' S' C'$; e, visto ser o diedro $A S B C$ egual a $A' S' B' C'$, concluimos (68) que os tetraedros são eguaes.

71. Pelo que temos dito, podemos dispensar a demonstração dos seguintes theoremas, bastando dizer que se verificam por sobreposição: — *Duas pyramides regulares são eguaes quando as suas bases e alturas são eguaes. Duas pyramides são eguaes quando têem bases eguaes, uma face de uma egual a uma face da outra, similhantemente dispostas, e fazendo angulos diedros eguaes.*

72. Egualmente se demonstram por sobreposição os seguintes theoremas: — *Dois prismas rectos são eguaes quando as suas bases e alturas são eguaes. Dois prismas são eguaes quando tres faces que determinam um triedro, em um dos prismas, são eguaes e similhantemente dispostas ás faces do outro prisma.*

73. *Dois polyedros são eguaes quando as faces de um são eguaes e similhantemente dispostas ás faces do outro e eguaes os angulos diedros formados por essas faces.* Verifica-se egualmente este theorema por sobreposição. Assentando uma face de um dos polyedros sobre a sua homologa do outro polyedro, (isto é, sobre a face que lhe é egual e similhantemente disposta), e perante a egualdade dos angulos diedros, facilmente se conclue a dos polyedros.

74. Quando dois polyedros podem ser divididos em egual numero de tetraedros eguaes e similhantemente dispostos, são eguaes.

75. **Polyedros similhantes.** — Dois tetraedros são similhantes quando todas as arestas de um são proporcionaes ás do outro e similhantemente dispostas. Dois polyedros são similhantes quando se podem decompôr em egual numero de tetraedros similhantes e similhantemente dispostos. As faces, arestas, vertices, angulos diedros, angulos solidos correspondentes em polyedros similhantes, denominam-se *faces homologas, arestas homologas, vertices homologos*, etc. Em dois polyedros similhantes denominam-se *pontos homologos* aquelles que unidos com tres vertices homologos, determinam tetraedros similhantes e similhantemente dispostos. A linha que une dois pontos homologos denomina-se *linha homologa.*

76. *Dois tetraedros são similhantes quando os seus angulos solidos são eguaes e similhantemente dispostos.* Como sabemos, para que dois tetraedros sejam similhantes, basta que as faces de um d'elles sejam similhantes e similhantemente dispostas ás faces do outro; temos, pois, no caso proposto que as faces do tetraedro são similhantes, visto terem angulos respectivamente eguaes e estarem similhantemente dispostas, pelo que concluimos a similhança dos tetraedros.

77. *Dois tetraedros são similhantes quando têem uma face*

similhante adjacente a angulos diedros respectivamente eguaes e similhantemente dispostos. Facilmente se vê que os tetraedros propostos têem os seus angulos solidos eguaes e portanto (76) são similhantes.

78. *Dois tetraedros são similhantes quando duas faces de um são similhantes a duas faces do outro e similhantemente dispostas, e são eguaes os angulos diedros formados por essas faces.*

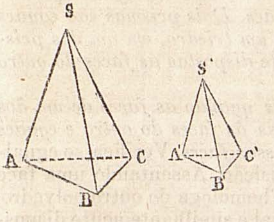


Fig. 36

Sejam os tetraedros $SABC$ e $S'A'B'C'$ (fig. 36) que têem similhantes as faces ASC e $A'S'C'$, ASB e $A'S'B'$, e eguaes os angulos diedros $BSAC$ e $B'S'A'C'$. Em virtude da similhança das faces dos tetraedros propostos, evidentemente os angulos solidos S e S', A e A', são eguaes. Em virtude da egualdade dos angulos diedros SA e $S'A'$ e da similhança das faces dos tetraedros que os determinam, concluimos que as faces BSC e $B'S'C'$ são similhantes, e portanto eguaes os angulos solidos B e B', C e C'. E, como já demonstrámos (76) que dois tetraedros são similhantes quando os seus angulos solidos são eguaes e similhantemente dispostos, temos que os tetraedros dados são similhantes.

79. *Dois polyedros são similhantes quando todas as faces menos uma são similhantes, similhantemente dispostas, e eguaes os angulos diedros formados por essas faces.* Sejam os polyedros $ABCDEFGHM$ e $abcdefghm$ (fig. 37) que satisfazem á condição de terem eguaes os angulos diedros determinados pelas suas faces respectivamente similhantes, menos as faces $ABCDE$ e $abcde$. Tirando as diagonaes HA e AC, e ha e ac, temos (78) que os tetraedros $HABC$ e $habc$ são similhantes. Considerando os polyedros, menos os tetraedros similhantes

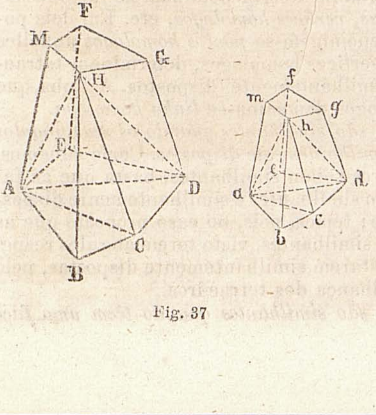


Fig. 37

$HABC$ e $habc$, vemos que satisfazem ás mesmas condições dos polyedros propostos: as faces homologas HAC e hac são similhantes. Podemos do mesmo modo determinar outros tetraedros $HACD$ e $hacd$, que são similhantes; e, continuando assim, concluimos que os polyedros propostos são similhantes, visto poderem-se considerar formados por tetraedros similhantes e similhantemente dispostos.

SUPERFICIES CURVAS E SOLIDOS REDONDOS

80. **Superficie curva** é aquella que não tem parte alguma plana. Em geometria elementar podem-se considerar as superficies curvas geradas pelo movimento de uma linha, que se denomina *geratriz* da superficie, seguindo no seu movimento uma ou muitas linhas fixas denominadas *directrizes*.

As superficies geradas por uma linha recta denominam-se *regradas*, as quaes podem ser *empenadas* e *planificaveis*.

São *empenadas* quando se não podem planificar sem se rasgarem ou formarem pregas; e *planificaveis* quando se podem extender sobre um plano sem se rasgarem ou formarem pregas.

Superficie cylindrica é a superficie gerada por uma recta movendo-se parallelamente a si mesma, e apoiando-se sobre uma curva plana que esteja fixa.

Superficie conica é a superficie gerada por uma recta passando por um ponto fixo e apoiando-se sobre uma curva plana que esteja fixa.

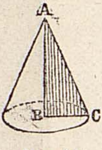


Fig. 38

Denominam-se *superficies de revolução* as geradas por uma linha recta ou curva girando em torno de uma recta fixa que se chama *eixo-de-revolução*. Cortando a recta AC geratriz (fig. 38) a recta AB eixo-de-revolução, a superficie determinada é uma superficie conica de revolução; se a geratriz CD (fig. 39), é parallela ao eixo-de-revolução AB, a superficie determinada é uma superficie cylindrica de revolução; se a geratriz fôr uma semi-circumferencia e o eixo-de-revolução o seu diametro, a superficie determinada é espherica.

Fig. 39

81. **Pyramide conica ou cone** é o solido ou volume (fig. 40), limitado por uma superficie conica e por uma superficie plana, que se denomina *base*. O raio da base denomina-se *raio do cone*; o centro da superficie conica é o *vertice do cone*, e a perpendicular baixada do vertice sobre o plano da base é a *altura do cone*. O cone diz-se *recto* (fig. 40) ou *obliquo*

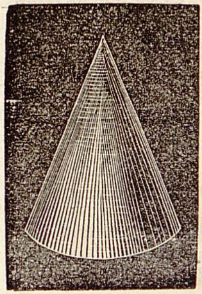


Fig. 40

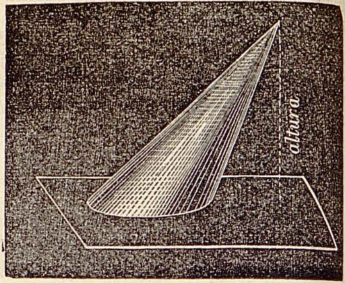


Fig. 41

(fig. 41) segundo o eixo é, ou não, perpendicular á base. *Aresta do cone* é a recta que une o vertice a qualquer ponto da circumferencia da base. O cone cuja base é um circulo diz-se *circular*.

Quando n'um cone circular recto a aresta é egual ao diametro, denomina-se *cone equilatero*.

Tangente ao cone é toda a recta que toca na superficie conica e não a corta por mais que se prolongue.

Plano tangente ao cone é todo o plano que toca na superficie conica e não a corta por mais que se prolongue. *Tronco de*

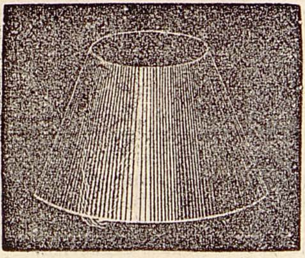


Fig. 42

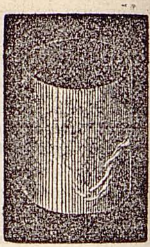


Fig. 43

cone ou *cone troncado* (fig. 42) é a porção do cone comprehendida entre dois planos parallelos.

Bases do tronco do cone são as porções dos planos parallelos que limitam o cone. *Altura do tronco do cone* é a perpendicular baixada de uma das bases sobre a outra.

82. **Cylindro.**— E' o solido ou volume (fig. 43) que tem por limites duas superficies planas parallelas, que se denominam *bases*, e uma superficie cylindrica. *Eixo* do cylindro é a perpendicular ás duas bases. *Raio* do cylindro é o raio das suas bases. O cylindro diz-se *recto* (fig. 43) quando o eixo é perpendicular ás bases; quando o eixo é obliquo ás bases (fig. 44), o cylindro denomina se obliquo.

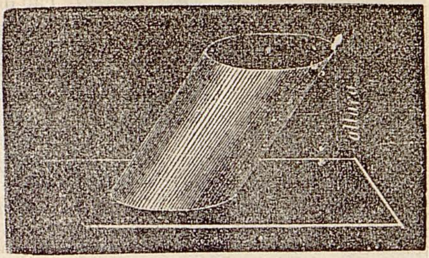


Fig. 44

Altura do cylindro é a perpendicular baixada de um ponto de uma das bases sobre a outra. Qualquer geratriz do cylindro denomina-se *aresta*. Quando uma das bases é um circulo, denomina-se *circular*.

O cylindro recto de base circular pode imaginar-se gerado (fig. 39) por um rectangulo movendo-se em-torno de um dos seus lados.

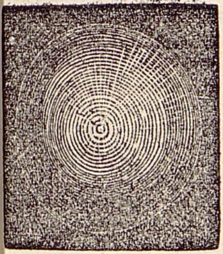


Fig. 45

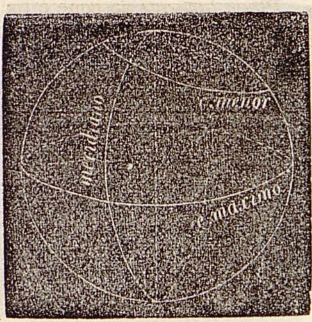


Fig. 46

Tangente ao cylindro é toda a recta que toca na superficie cylindrica e não a corta por mais que se prolongue.

Plano tangente ao cylindro é todo o plano que toca na superficie cylindrica e não a corta por mais que se prolongue.

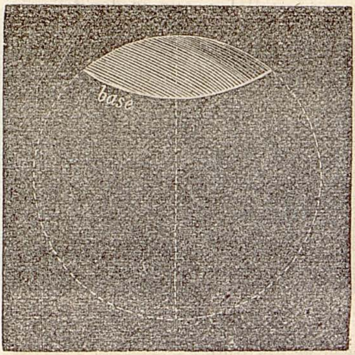


Fig. 47

Tronco de cylindro ou *cylindro troncado* é a porção do cylindro comprehendida entre uma base e um plano obliquo á base.

83. **Esphera.**—E' o solido da revolução (fig. 45) gerado pelo movimento de um semi-circulo em torno do seu diametro.

Centro da esphera é um ponto interior igualmente afastado de todos os pontos da superficie espherica.

Diametro da esphera é a recta que passa pelo centro e tem ambos os extremos na superficie da esphera. O diametro é egual ao dobro do raio. Toda a secção feita em uma esphera por um plano é um circulo.

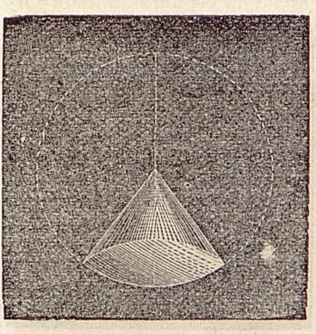


Fig. 48

Circulo maximo da esphera (fig. 46) é todo o circulo que resulta da intersecção da esphera com um plano que passa pelo centro. O raio de qualquer circulo maximo é egual ao raio da esphera.

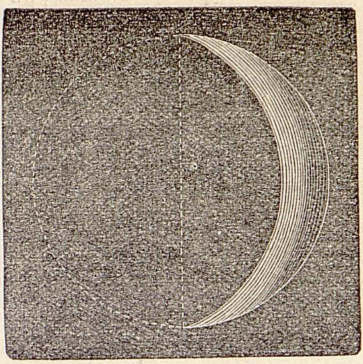
Circulo menor da esphera é todo o circulo que resulta da intersecção da esphera com um plano que não passa pelo centro.

Eixo de um circulo da esphera é o diametro perpendicular ao plano do circulo; os seus extremos denominam-se *pólos*.

Meridiano é o circulo que resulta da intersecção da esphera com um plano que passa pelo eixo do semi-circulo gerador.

Segmento espherico é uma das partes (fig. 47) em que se decompõe a esphera, quando se corta por um plano. Os segmentos são eguaes quando o plano passa pelo centro da esphera, e denomina-se *hemispherios.*

Calotte espherica é a porção da superficie da esphera comprehendida entre dois planos parallelos, um cortando a esphera e outro tangente. A circumferencia determinada na superficie da esphera pelo plano que a corta denomina-se *base da calotte.*



Fg. 49

Sector espherico é a porção da esphera (fig. 48) composta de um segmento e de um cóne que, tendo o vertice no centro da esphera, tem por base a propria superficie plana d'esse segmento. O sector espherico póde imaginar se gerado por um sector circular que se faz girar em-torno de um dos raios extremos.

Unha ou *cunha espherica* é a porção da esphera limitada por dois semi-circulos maximos que terminam em um diametro commum, e pela porção da superficie da esphera comprehendida entre elles.

Fuso ou *lunula espherica* é a parte da superficie da esphera (fig. 49) limitada por duas semicircumferencias maximas que têem um diametro commum.

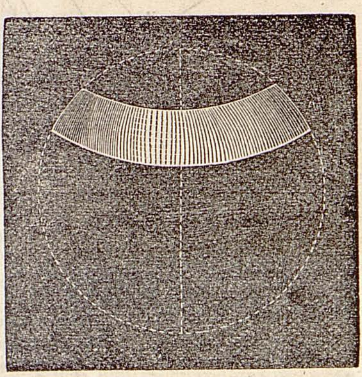


Fig. 50

Camada espherica é a porção da esphera comprehendida entre dois planos parallelos.

Zona espherica é a porção da superficie da esphera (fig. 50), comprehendida entre dois planos parallelos, ambos secantes.

As circumferencias,

determinadas por esses planos, na superficie da esphera, denominam-se *bases*. *Altura da zona* é a porção do eixo comprehendida entre as bases.

Plano tangente á esphera é todo o plano que toca na superficie espherica e não a corta por mais que se prolongue.

Tangente á esphera é toda a recta que toca na superficie espherica e não a corta por mais que se prolongue.

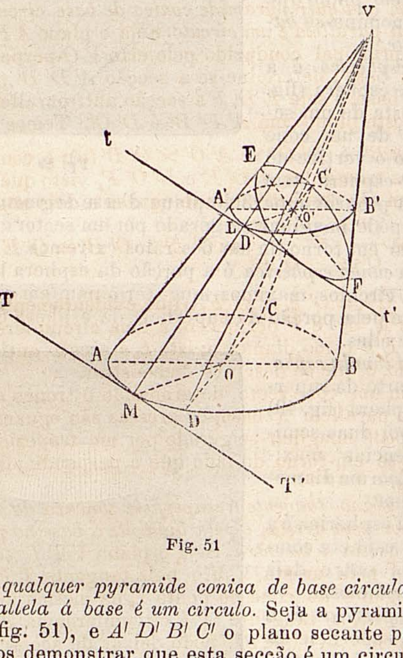


Fig. 51

84. *Em qualquer pyramide conica de base circular, toda a secção parallela á base é um circulo.* Seja a pyramide conica $VADB$ (fig. 51), e $A'D'B'C'$ o plano secante parallelo á base; vamos demonstrar que esta secção é um circulo. Sejam DC, $D'C'$, AB e $A'B'$, as intersecções com os planos ADB e $A'D'B'$ de dois planos que passam pelo eixo VO; temos determinados os triangulos similhantes AVO, $A'VO'$, DVO, $D'VO'$, BVO, $B'VO'$, CVO e $C'VO'$, d'onde tiramos

$\frac{VO}{VO'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{DO}{D'O'} = \frac{BO}{B'O'} = \frac{CO}{C'O'}$ e visto ser $AO = DO = BO = CO$, temos que será $A'O' = D'O' = B'O' = C'O'$; isto é, a secção $A'D'B'C'$ é um circulo, o que se desejava demonstrar.

85. Denomina-se *plano principal* a todo o plano conduzido pelo eixo VO perpendicular á base; e diz-se que o plano é *anti-parallelo á base* quando é perpendicular ao plano principal.

86. *Em qualquer pyramide conica de base circular, toda a secção anti-parallela é um circulo.* Seja o plano ABV (fig. 51) o plano principal conduzido pelo eixo VO perpendicular ao plano da base; determine-se a secção $A'D'B'$ parallela ao plano da base, e seja $ED'F$ a secção anti-parallela; a intersecção d'este plano com $A'D'B'$ é $D'O'$. Temos que no circulo $A'D'B'$ é $\overline{D'O'}^2 = A'O' \times O'B'$ (a); e, como são similhantes os triangulos $A'O'E$ e $B'O'F$, visto que dois angulos de um são respectivamente eguaes a dois angulos do outro, temos $\frac{O'A'}{O'E} = \frac{O'F}{O'B'}$ ou $O'A' \times O'B' = O'E \times O'F$; logo (a) $\overline{D'O'}^2 = O'E \times O'F$, o que evidentemente prova que os pontos E, D' e F pertencem a uma circumferencia traçada sobre EF como diametro; isto é, a secção anti-parallela é um circulo, o que se desejava demonstrar.

87. Em um cóne recto, determinado o tronco do cóne por um plano parallelo á base, as arestas são eguaes e o tronco do cóne pode imaginar-se gerado por um trapezio rectangulo movendo-se em-torno do lado que é perpendicular aos lados parallelos.

88. *O plano tangente á superficie convexa do cóne é determinado por uma aresta, e pela tangente á base no ponto em que a mesma aresta a incontra.* Seja o plano VTT' (fig. 51), determinado pela aresta VM e pela tangente TT'; este plano é tangente ao cóne no ponto L da mesma aresta VM e n'elle existirá a tangente tt' á circumferencia $A'LB'C'$ tirada no ponto L, o que não pode deixar de acontecer visto serem as tangentes parallelas; e como em angulos eguaes situados em planos parallelos, sendo parallelos dois lados, os outros tambem o são, concluimos que no plano das duas tangentes existe a recta VM, o que demonstra o theorema.

89. *Planificação de um cóne recto.* Planificação é o traçado

sobre um plano das superficies planas ou curvas que limitam um corpo. Seja VAB (fig. 52) o cóne recto; desdobrando-o

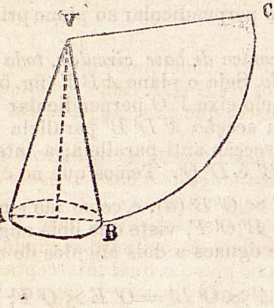


Fig. 52

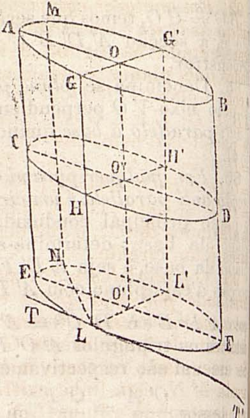


Fig. 53

sobre um plano temos um sector circular $B\ V\ C$ de raio egual á geratriz e o arco $B\ C$ egual á circumferencia da base. Para determinarmos o numero de graus do arco temos a formula que já conhecemos $\widehat{a} = 2\pi r \times \dfrac{n^o}{360^o}$

Designando por L a aresta e por R o raio da base, o comprimento do arco do sector é, como sabemos, $2\pi R$; temos pois

$$2\pi R = 2\pi L \times \frac{n^o}{360}$$

d'onde tiramos $n^o = 360 \times \dfrac{R}{L}$

90. Em uma pyramide cónica a secção produzida por um plano perpendicular ao eixo é, como já dissémos, um circulo; se o plano cortar o eixo obliquamente, a secção é uma ellipse; se fôr parallelo ao eixo, determina um ramo da hyperbole; se o plano fôr parallelo a uma das geratrizes, a secção determinada é uma parabola.

91. Pyramides cónicas similhantes são as que têem os eixos proporcionaes aos diametros das bases e egualmente inclinados sobre ellas.

92. *Em qualquer cylindro de base circular, toda a secção parallela ás bases é um circulo.* Seja o cylindro de base circular representado na fig. 53, e façam-se passar pelo eixo do cylindro dois planos; e sejam as suas intersecções com as bases e com o plano $C\,H\,D\,H'$ parallelo a ellas as seguintes linhas, AB, $C\,D$, $E\,F$ e $G\,G'$, $H\,H'$, $L\,L'$, que são respectivamente parallelas, pelo que tiramos $A\,O = C\,O'' = E\,O'$, $G\,O = H\,O'' = L\,O'$ e $B\,O = D\,O'' = F\,O'$; e, visto ser $A\,O = G\,O = B\,O$, $E\,O' = L\,O' = F\,O'$, concluimos que $C\,O'' = H\,O'' = D\,O''$, isto é, os pontos C, H e D, estão egualmente afastados de O'', o que demonstra que a secção parallela ás bases é um circulo.

93. *O plano tangente á superficie convexa do cylindro é determinado por uma aresta e pela tangente á base no ponto em que a mesma aresta a incontra.* Seja o plano $G\,T\,T'$ (fig. 53), determinado pela aresta $G\,L$ e pela tangente á base $T\,T'$. Se este plano cortasse a superficie do cylindro segundo a aresta $M\,N$, esta linha existiria no plano o qual interceptaria a base segundo a linha $L\,N$, o que não é possivel; logo o plano $G\,T\,T'$ é tangente ao cylindro segundo a aresta $G\,L$, o que se desejava demonstrar.

94. O que dissémos, quando tratámos da pyramide cónica, que se intendia por plano principal e secção anti-parallela, tem identica applicação ao cylindro.

95. *Planificação de um cylindro recto.* Seja o cylindro recto representado na fig. 54 pelas suas projecções, vertical e horizontal, que se deseja planificar; traça-se uma recta egual á circumferencia de raio $c\,a$ rectificada; nos extremos d'esta linha levantam-se perpendiculares eguaes a $a'\,a''$, altura do cylindro; unem-se os extremos das perpendiculares; e reunindo ao rectangulo construido dois circulos de raios eguaes a $c\,a$ temos determinada a planificação do cylindro.

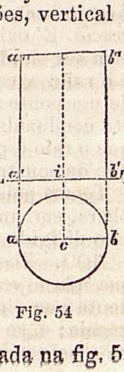


Fig. 54

96. Cylindros similhantes são os que têem os eixos proporcionaes aos diametros das bases e egualmente inclinados sobre os planos d'ellas.

97. *A secção feita n'uma esphera por um plano é um circulo.* Seja a esphera representada na fig. 55

e $A\,D\,B$ o plano que corta a esphera. Traçando os raios $O\,A$, $O\,D$ e $O\,B$ que são eguaes, visto serem raios da esphera, e baixando do ponto O sobre o plano $A\,D\,B$ a perpendicular $O\,C$, temos que as linhas $O\,A$, $O\,D$ e $O\,B$ obliquas eguaes, desviar-se-hão egualmente do ponto C pé da perpendicular $O\,C$, e teremos $A\,C = D\,C = B\,C$; logo os pontos A, D e B distam egualmente do ponto C, pelo que concluimos que o plano $A\,D\,B$ é um circulo da esphera, o que se desejava demonstrar.

98. *Qualquer circulo maximo da esphera a divide em duas partes eguaes.* Seja a esphera representada na fig. 55; voltando, pois, a parte da esphera $E\,F\,M\,G\,H$ para a parte superior de maneira que se possa ajustar a base $E\,F\,G\,H$ sobre a base $E\,F\,G\,H$ da parte superior da esphera $E\,F\,B\,G\,H$, as duas superficies coincidem perfeitamente, o que não pode deixar de acontecer, aliás os pontos da superficie da esphera não estariam egualmente afastados do centro; portanto as duas superficies ajustam-se, o que demonstra o theorema.

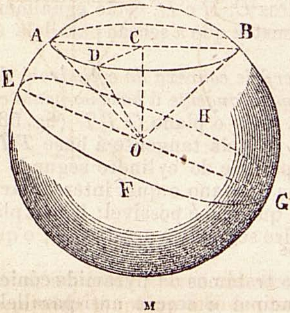


Fig. 55

99. *Todo o plano tangente á esphera é perpendicular ao raio tirado para o ponto de tangencia.* E' evidente que a menor de todas as rectas que podem ser tiradas do centro da esphera para o plano tangente é o raio; e, como sabemos (20), que a perpendicular baixada de um ponto sobre um plano é menor que qualquer outra recta conduzida do mesmo ponto para o dito plano, concluimos que o raio é perpendicular ao plano no ponto de tangencia, o que demonstra o theorema.

Temos pois que para determinar um plano tangente á esphera, em um ponto, basta tirar um plano perpendicular ao raio dirigido a esse ponto.

100. *Todo o plano conduzido pelo ponto de tangencia que não é perpendicular ao raio, é um plano secante.* E' evidente que o plano é obliquo ao raio dirigido ao ponto de tangencia; e, se para esse plano tirarmos do centro da esphera uma perpendicular, esta recta será menor que o raio, o que

prova que o plano passa entre a superficie da esphera, isto é, o plano corta a esphera, o que demonstra o theorema.

101. Duas espheras são tangentes, quando a distancia entre os centros é egual á somma dos raios, ou egual á sua differença.

102. *Dada uma esphera, determinar o seu diametro.* Seja a esphera representada na fig. 56. Determinando qualquer pon-

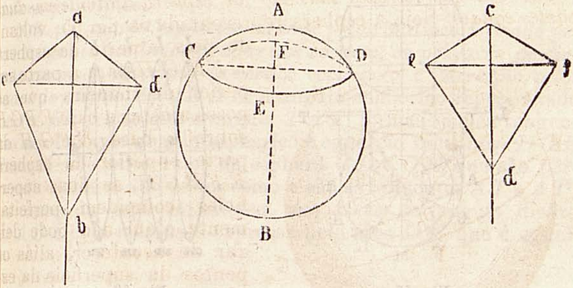


Fig. 56

to A e fazendo centro n'este ponto e com qualquer abertura, descreve-se com um compasso curvo o circulo menor $CEDF$ e marca-se sobre a circumferencia $CE = CF$.

Com as cordas CE, CF e EF construa-se o triangulo isosceles ecf; do vertice c tire-se a perpendicular $c\,d$ sobre ef, e de qualquer dos outros vertices e ou f tirem-se as perpendiculares $e\,d$ ou fd a $c\,e$ ou fc, que intercepta a perpendicular ao meio de ef no ponto d; temos assim determinado o diametro do circulo menor, que é a recta $c\,d$. Com as cordas eguaes AC, AD e a recta $c\,d$, construa-se outro triangulo isosceles $a\,c'\,d'$, de a tire-se a perpendicular $a\,b$ sobre $c'\,d'$, e de qualquer dos outros vertices c' ou d' tirem-se as perpendiculares $c'\,b$ ou $d'\,b$ aos lados $a\,c'$ ou $a\,d'$, que intercepta a perpendicular ao meio de $c'\,d'$ no ponto b; temos assim determinado o diametro da esphera que é a recta $a\,b$.

103. *Planificação da superficie da esphera.* Rigorosamente não se pode planificar a superficie de uma esphera; porêm, se quizermos obter approximadamente a sua planificação, resolveremos o problema da seguinte maneira.

Seja a esphera representada na fig. 57 pelas suas projecções nos dois planos, horizontal e vertical; traça-se uma recta egual á circumferencia de raio $A\,O$ rectificada, e sobre ella marcam-se doze divisões, isto é, um numero egual de partes em que está dividida a circumferencia.

Levantando perpendiculares (fig. 58) $l\,m$, $l'\,m'$, $l''\,m''$, $l'''\,m'''$,

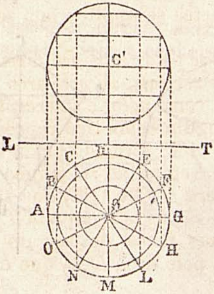


Fig. 57

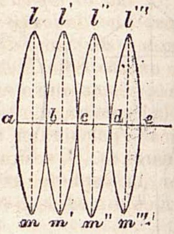


Fig. 58

ao meio de cada uma das divisões $a\,b$, $c\,d$, $c\,d$, $d\,e$, determinando a grandeza d'essas perpendiculares respectivamente eguaes a metade da circumferencia rectificada e traçando os arcos de circulo $l\,a\,m$, $l\,b\,m$, $l'\,b\,m'$, $l'\,c\,m'$, $l''\,c\,m''$, $l''\,d\,m''$, etc., temos a planificação de doze fusos, que é approximadamente a superficie da esphera planificada. Na fig. 58 estão apenas representados quatro fusos; do mesmo modo, como acima dissémos, se completariam os doze, ficando assim resolvido o problema.

104. **Angulos esphericos.**—*Angulo espherico* é a inclinação reciproca de dois arcos de circulos maximos da esphera. O ponto A (fig. 59), onde os arcos se incontram, denomina-se *vertice do angulo;* e os arcos $A\,B$ e $A\,C$, *lados do angulo.*

Um angulo espherico designa-se por tres lettras, designando a do meio o vertice. Os angulos esphericos dizem-se eguaes quando os lados de um se podem ajustar perfeitamente sobre os lados do outro. Os angulos esphericos gozam das mesmas propriedades dos angulos diedros ou dos angulos rectilineos; assim temos aos angulos esphericos a completa applicação dos seguintes principios.

Um arco de circulo maximo incontrando outro arco de circulo maximo, fórma dois angulos esphericos cuja somma é egual a 180°; se estes angulos são eguaes, dizem-se rectos e cada um tem 90° e os arcos são perpendiculares. Se um arco de circulo maximo for perpendicular a outro, este tambem é perpendicular ao primeiro. De um ponto de um arco de circulo maximo, só se pode levantar um arco de circulo maximo perpendicular ao primeiro. Os angulos esphericos verticalmente oppostos são eguaes. Assim como estes se applicariam todos os outros principios.

105. *O angulo espherico mede-se pelo rectilineo formado pelas tangentes aos lados tiradas dos vertices, ou pelo arco de circulo maximo, descripto do vertice como pólo, e intercepto pelos lados do angulo.* Seja EAD o angulo espherico representado na fig. 60; temos que o angulo TAT' formado pelas tangentes aos lados do angulo espherico é egual ao rectilineo DOE determinado pelos raios da esphera OD e OE, que são perpendiculares a AB assim como o são as tangentes AT e AT'; os raios da esphera existem nas faces do angulo diedro $DABE$ cuja medida é expressa pelo arco DE, que é egual-

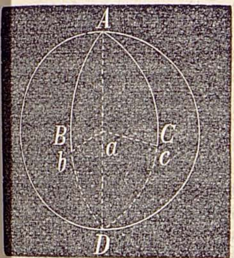


Fig. 59

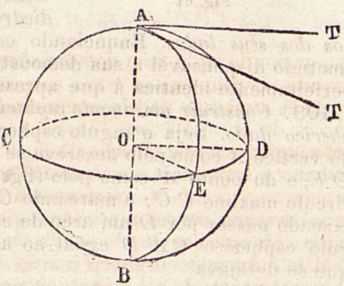


Fig. 60

mente a do rectilineo DOE, e do angulo que lhe é egual TAT', como este é do angulo espherico EAD. Egualmente como o angulo diedro $DABE$ é a medida do angulo espherico proposto, e a medida do primeiro é o arco de circulo maximo descripto de A como pólo, temos que este arco é tambem a medida do angulo espherico.

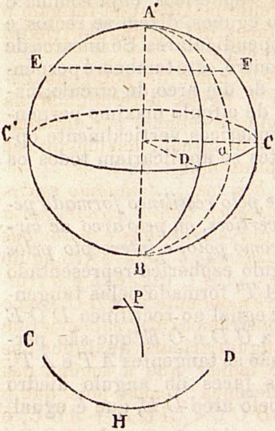


Fig. 61

106. *Dado um arco de circulo na superficie da esphera, determinar um dos pólos d'esse circulo.* Seja $C\,D$ (fig. 61) o arco de circulo e determine-se o seu diametro $E\,F$, como já dissémos (102); determinado o circulo maximo $A'\,E\,B\,F$, traça-se o diametro $A'\,B$ perpendicular a $E\,F$; fazendo centro em C e em qualquer outro ponto H do arco $C\,D$, descrevem-se arcos de circulo com o raio de grandeza $A'\,E$, os quaes se interceptam n'um ponto P, que dista egualmente de D, de C e de H; temos que esse ponto é o pólo do circulo cujo arco era conhecido.

107. *Os angulos sphericos estão entre si como os angulos diedros determinados pelos planos dos seus lados.* Enunciando este theorema, parece-nos comtudo dispensavel a sua demonstração n'este logar por ser perfeitamente identica á que apresentámos no § 40.

108. *Construir um angulo espherico egual a outro angulo espherico dado.* Seja o angulo espherico dado $D\,A\,E$ (fig. 60); do vertice A como pólo descreve-se o arco do circulo maximo $D\,E$, e do ponto A' como pólo (fig. 61) descreve-se o arco de circulo maximo $C\,C'$; e marcando $C\,D$ egual a $D\,E$ (fig. 60) e fazendo passar por D um arco de circulo maximo, temos o angulo espherico $C\,A'\,D$ egual ao angulo espherico $D\,A\,E$, o que se desejava.

109. *Dividir um angulo espherico em duas partes eguaes.* Seja o angulo espherico $C\,A'\,D$ (fig. 61); do ponto A' como pólo descreve-se o arco de circulo maximo $C\,D$; dividindo este arco ao meio pelo ponto a e fazendo passar por este ponto o arco de circulo maximo $A'\,a\,B$, temos por este arco o angulo espherico dividido em duas partes eguaes.

110. Triangulos sphericos.—Triangulo espherico é a figura determinada na superficie da esphera por tres arcos de circulo maximo, a cada um dos quaes se dá o nome de lado. Os triangulos sphericos distinguem-se emquanto aos seus la-

dos pelos seguintes nomes: equilateros, isosceles e scalenos, segundo têem todos os seus lados eguaes, só dois eguaes, ou todos deseguaes. Os arcos de circulo maximo que formam o triangulo espherico, limitam as faces de um angulo triedro cujo vertice está no centro da esphera.

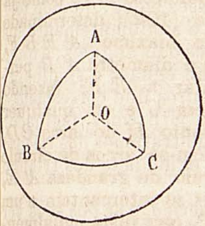


Fig. 62

Dá-se o nome de polygono espherico á figura determinada na superficie da esphera por differentes arcos de circulo maximo que se interceptam dois a dois.

111. *Em todo o triangulo espherico, qualquer lado é menor que a somma dos outros dois e maior que a sua differença.* Seja o triangulo espherico $A\,B\,C$ (fig. 62), e o triedro correspondente $O\,A\,B\,C$. Como já demonstrámos (50), sabemos que n'um angulo triedro qualquer das faces é menor que a somma das outras duas e maior que a sua differença; temos, pois, que o angulo $A\,O\,B < A\,O\,C + B\,O\,C$, $B\,O\,C < A\,O\,B + A\,O\,C$, e $C\,O\,A < A\,O\,B + B\,O\,C$; mas a medida do angulo $A\,O\,B$ é $\frown{A\,B}$, do angulo $B\,O\,C$ é $\frown{B\,C}$, e do angulo $C\,O\,A$ é $\frown{A\,C}$; logo temos tambem $\frown{A\,B} < \frown{A\,C} + \frown{B\,C}$, $\frown{B\,C} < \frown{A\,B} + \frown{A\,C}$, e $\frown{A\,C} < \frown{A\,B} + \frown{B\,C}$, d'onde tiramos $\frown{A\,C} > \frown{A\,B} - \frown{B\,C}$, $\frown{A\,B} > \frown{B\,C} - \frown{A\,C}$ e $\frown{B\,C} > \frown{A\,C} - \frown{A\,B}$, isto é, qualquer lado menor que a somma dos outros dois e maior que a sua differença, o que se desejava demonstrar.

112. *Em todo o triangulo espherico a somma dos tres lados é menor que a circumferencia de um circulo maximo da esphera, isto é, menor que 360^0.* Seja o triangulo espherico $A\,B\,C$ (fig. 62) e o triedro correspondente $O\,A\,B\,C$. Como já demonstrámos (51), sabemos que a somma das faces de um angulo polyedro convexo é menor que quatro angulos rectos; temos, pois, que $A\,O\,B + B\,O\,C + C\,O\,A < 360^0$; mas a medida do angulo $A\,O\,B$ é $\frown{A\,B}$, do angulo $B\,O\,C$ é $\frown{B\,C}$, e do angulo $C\,O\,A$ é $\frown{A\,C}$; logo $\frown{A\,B} + \frown{B\,C} + \frown{A\,C} < 360^0$, o que se desejava demonstrar.

113. **Nos triangulos esphericos neunhm lado pode ser egual**

a 180°; pode, comtudo, nos triangulos esphericos haver um lado maior que 180°.

114. Os triangulos esphericos traçados em espheras eguaes ou na mesma esphera, apresentam os seguintes casos de egualdade: quando os seus lados são eguaes e similhantemente dispostos; quando têem dois lados eguaes e similhantemente dispostos, e egual o angulo formado por esses lados; quando têem dois angulos respectivamente eguaes e similhantemente dispostos, e egual o lado adjacente a esses dois angulos; e quando têem tres angulos respectivamente eguaes e similhantemente dispostos. Determinando os triedros que correspondem aos triangulos esphericos, como acima já fizemos, facilmente com applicação do que dissémos quando tratámos dos triedros (52 e 53) se demonstram os casos de egualdade dos triangulos esphericos.

115. Se tivermos um triangulo espherico, e se dos seus vertices, como pólos, descrevermos arcos de circulos maximos, estes arcos determinam outro triangulo espherico, em que os seus vertices são reciprocamente pólos dos lados do primeiro triangulo; os triangulos esphericos que satisfazem a estas condições denominam-se triangulos polares.

POLYEDROS INSCRIPTOS E CIRCUMSCRIPTOS A' PYRAMIDE CONICA, AO CYLINDRO E A' ESPHERA

116. Inscrevendo na base de uma pyramide conica um polygono regular e unindo os vertices d'este polygono com o vertice da pyramide conica, temos uma pyramide inscripta que será regular se a pyramide conica fôr recta, e as suas arestas são geratrizes do cóne. Circumscrevendo na base de uma pyramide conica um polygono regular e unindo os vertices d'este polygono com o vertice da pyramide conica, temos uma pyramide circumscripta que será do mesmo modo regular se a pyramide conica for recta. Os apothemas das pyramides regulares circumscriptas ás pyramides conicas rectas, são geratrizes do cóne. Temos, pois, que uma pyramide está *inscripta* ou *circumscripta* a uma pyramide conica, quando a sua base está inscripta ou circumscripta na base do cóne e ambas têem o mesmo vertice.

117. Inscrevendo ou circumscrevendo a cada uma das bases de um cylindro um polygono regular de egual numero de lados respectivamente parallelos, e unindo os vertices dos

angulos do polygono superior com os vertices do polygono inferior, temos inscripto ou circumscripto no cylindro um prisma. As arestas do prisma inscripto são geratrizes do cylindro. Temos, pois, que um prisma está *inscripto* ou *circumscripto* a um cylindro quando tem as suas bases inscriptas ou circumscriptas nas do cylindro.

118. Inscrevendo ou circumscrevendo n'um circulo maximo de uma esphera um polygono regular de numero de lados multiplo de quatro, e fazendo o semi-polygono uma revolução inteira em-torno do seu diametro, que se conserva immovel, temos inscripto ou circumscripto na esphera um corpo composto de duas pyramides cónicas rectas (a primeira e a ultima) e de troncos de cóne; e se inscrevermos e circumscrevermos, aos cónes e aos troncos de cóne, pyramides regulares e troncos de pyramides (116), do mesmo numero de faces e onde os lados das bases sejam respectivamente parallelos, temos finalmente inscripto ou circumscripto na esphera um polyedro, cujas faces são triangulos e trapezios, e que é composto de duas pyramides regulares (a primeira e a ultima) e de troncos de pyramides. Temos, pois, que um polyedro está *inscripto* quando os seus vertices estão na superficie da esphera ra, e *circumscripto* quando as suas faces são tangentes á esphera.

119. *Em um prisma triangular a somma das áreas de quaesquer duas faces é maior que a terceira.* Seja o prisma triangular $ABCDEF$ (fig. 63); deseja-se demonstrar que as faces $AF + BF > AE$. Conduzindo por um ponto G da aresta AD um plano GHL perpendicular a AD, este plano será tambem perpendicular ás arestas BE e CF que são parallelas a AD, visto que (23), se uma de duas parallelas fôr perpendicular a um plano, tambem a outra o será. Considerando os parallelogrammos AF e BF de bases AD e CF e respectivas alturas GL e LH, e sabendo que a área de um parallelogrammo é egual ao producto da base pela altura, temos que

$$AF = AD \times GL$$

e

$$BF = CF \times LH$$

Sommando temos

$$AF + BF = AD \times GL + CF \times LH$$

E visto ser

$$AD = CF$$

tiramos

$$AF + BF = AD \times (GL + LH) \; (a);$$

do mesmo modo a área do parallelogrammo

$$AE = AD \times GH \; (b)$$

Mas em virtude de ser $GL + LH > GH$, comparando as egualdades (a) e (b), concluimos que $AF + BF > AE$, o que se desejava demonstrar.

120. *A superficie convexa do cylindro é sempre maior que a superficie do prisma inscripto e menor que a do circumscripto.* Seja o cylindro de base $EFGH$ representado na fig. 64, e inscreva-se no cylindro um prisma $ABCDEFGH$; designando por C a superficie convexa do cylindro e por P a superficie do prisma, vamos demonstrar que é $C > P$.

Se a superficie convexa do cylindro não fôr maior que a do prisma, será menor ou egual; isto é, $C < P$ ou $C = P$.

Suppondo o caso de ser $C < P$ e designando por δ a diffe-

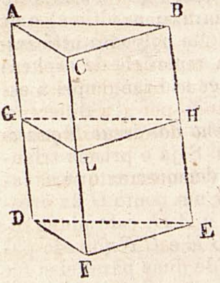


Fig. 63

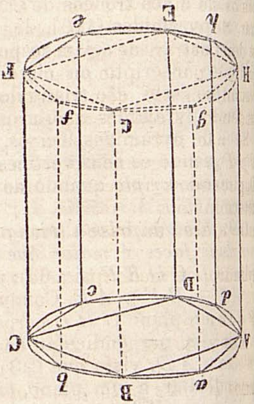


Fig. 64

rença, evidentemente será $C + \delta = P$ (a); duplicando o numero de lados do polygono base do prisma, temos os polygonos bases $AaBbCcDd$ e $EeFfGgHh$ de um novo prisma P', as quaes bases differem da base do cylindro uma grandeza s de modo que seja $s < \frac{1}{2}\,\delta$. Mas, como a porção de superficie convexa do cylindro $AagH$ é maior que o parallelogrammo Ag face do prisma inscripto P', assim como todas as outras porções da superficie convexa do cylindro comparadas com as faces lateraes do prisma P', temos que cada face d'este prisma será menor que a porção da superficie do cylindro que lhe corresponde accrescentada de dois segmentos de circulo das duas bases, e portanto $C + 2s > P'$. Mas visto ser $P' > P$, e como suppuzemos (a) $C + \delta = P$, evidentemente será $C + 2s > C + \delta$ d'onde tiramos $s > \frac{1}{2}\delta$,

o que é impossivel, visto ter-se feito $s < \frac{1}{2}\delta$.

Concluimos que não pode ser $C < P$, nem $C = P$, porque, sendo $P' > P$, teriamos $C < P'$, o que é absurdo, como acabamos de mostrar; logo é $C > P$, o que se desejava demonstrar. Se considerarmos agora o prisma circumscripto, deseja-se demonstrar, designando por C a superficie convexa do cylindro e por P a do prisma circumscripto, que é $C < P$. Mais resumidamente demonstraremos esta parte do theorema attendendo ás considerações que já acima fizemos.

Se não é $C < P$ será $C > P$ ou $C = P$; considerando $C > P$ e designando por δ a differença, temos $C = P + \delta$ (a). Duplicando o numero de lados do polygono base do prisma P determinamos o prisma P'; e designando por s a differença entre a área da base d'este polygono e a do circulo, base do cylindro, de modo que seja $s < \frac{1}{2}\delta$, evidentemente será $P' + 2s > C$.

Mas visto ser $P > P'$, e como suppuzemos (a) $C = P + \delta$, temos $P + 2s > P + \delta$, d'onde tiramos $s > \frac{1}{2}\delta$, o que é absurdo, visto termos considerado $s < \frac{1}{2}\delta$; logo não é $C > P$ nem $C = P$, porque sendo $P' < P$ teriamos $C > P'$, o que é absurdo como se acaba de mostrar; logo é $C < P$, o que se desejava demonstrar.

121. *A superficie convexa da pyramide cónica é sempre maior que a da pyramide inscripta e menor que a da circumscripta.* A demonstração d'este theorema não julgamos de necessidade apresentál-a, visto que para chegarmos á conclusão do principio ennunciado se pode seguir exactamente a demonstração que démos no theorema anterior.

122. *A superficie da esphera é maior que a do polyedro inscripto e menor que a do circumscripto.* Se tirarmos um plano pelos pontos em que as pyramides cónicas (inscriptas ou circumscriptas) tocam na esphera, determinadas essas pyramides como já vimos (118), temos que determinarão de um e de outro lado na circumferencia da secção duas superficies, das quaes a exterior é maior que a interior; portanto a somma das primeiras (isto é, a superficie espherica) é maior que a somma das segundas, que são as superficies convexas dos cónes inscriptos, e menor que a somma das superficies dos cónes circumscriptos. Temos, pois, que a superficie do polyedro é maior que a superficie cónica inscripta e menor que a circumscripta; logo concluimos que será maior que a superficie da esphera inscripta e menor que a da circumscripta, o que se desejava provar.

123. Designando por L o lado do polyedro regular inscripto n'uma esphera de raio r conhecido, damos as seguintes formulas que são de conveniente exercicio e applicação. No tetraedro temos

$$L = \frac{2 \times r \times \sqrt{6}}{3},$$

no hexaedro $L = \dfrac{2 \times r \sqrt{3}}{3}$,

no octaedro $L = r \times \sqrt{2}$,

no dodecaedro $L = \dfrac{r \times \left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{3}$

e no icosaedro $L = \dfrac{r}{5} \sqrt{10\,(5 - \sqrt{5})}$.

Areas e volumes

124. *A área de qualquer pyramide regular, avalia-se multiplicando metade do perimetro da base pelo apothema da pyramide.* Seja a pyramide $V\,A\,B\,C\,D\,E\,F$ (fig. 31); designando por A a sua área, por P o perimetro e por a o apothema (57) temos que será $A = \dfrac{P}{2} \times a$. Como sabemos, as faces de uma

pyramide regular são triangulos isosceles eguaes entre si (59) e temos tantos triangulos quantos são os lados do polygono $ABCDEF$, base da pyramide; portanto, a área da pyramide será a de um dos triangulos AVB multiplicada pelo numero de lados do polygono base. Mas a área do triangulo AVB é egual a $\frac{AB}{2}$ multiplicada pela sua altura (que designamos por a, e que é o apothema da pyramide); logo designando por n o numero de lados da base, temos a área da pyramide $A = \frac{AB}{2} \times a \times n$ ou $A = \frac{P}{2} \times a$, o que se desejava provar.

125. *A área do tronco de qualquer pyramide regular avalia-se multiplicando metade da somma dos perimetros das duas bases pela altura de um dos trapezios, faces do tronco.* Seja o tronco da pyramide regular representado na fig. 31, as suas faces lateraes $AabB$, $BbcC$, etc., são trapezios isosceles todos eguaes entre si.

Unindo o ponto o com b, c, d, e, f, é evidente que os trapezios rectangulos $oaAO$, $obBO$, etc., são todos eguaes entre si, temos $aA = bB = cC = dD = eE = fF$, logo as faces lateraes do tronco são todas eguaes entre si. Designando por a a altura de uma das faces, temos que a área de uma d'ellas $AabB$ será egual a $\frac{AB + ab}{2} \times a$ (visto ser a área de um trapezio egual á semi-somma das bases multiplicada pela altura); sendo n o numero de faces do tronco, será a sua área $\frac{AB + ab}{2} \times a \times n$ ou $\frac{AB \times n + ab \times n}{2} \times a$; e, como $AB \times n$ e $ab \times n$ são os perimetros das bases que podemos designar por P e p, temos a área do tronco de pyramide $A = \frac{P + p}{2} \times a$, o que desejavamos demonstrar.

Cortando o tronco da pyramide por um plano perpendicular e ao meio do eixo oO, o perimetro da secção produzida no tronco por esse plano é egual a $\frac{P + p}{2}$ (como se viu no n.º 139 da *Geometria Plana*); logo pode avaliar-se a área do tronco do cóne, *multiplicando o perimetro da secção parallela ás bases e a egual distancia d'ellas, pela altura de uma das faces.*

126. *A área de qualquer prisma avalia-se multiplicando por uma das arestas lateraes do prisma o perimetro da secção perpendicular a essa aresta.* Seja o prisma $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (fig. 63) e $G\,H\,L$ a secção recta, cujo lado $G\,L$ será a altura da face $A\,F$, $L\,H$ a altura da face $C\,E$, e $H\,G$ a altura da face $A\,E$. Temos, pois, que a área de cada uma das faces é

$$A\,F = A\,D \times G\,L$$
$$C\,E = C\,F \times L\,H$$
$$A\,E = B\,E \times H\,G$$

logo a área lateral do prisma será egual a

$$A\,D \times G\,L + C\,F \times L\,H + B\,E \times H\,G$$

Mas visto ser $A\,D = C\,F = B\,E$, que são as arestas lateraes do prisma, temos que a sua área, designando-a por A, será $A = A\,D \times (G\,L + L\,H + H\,G)$ o que se desejava demonstrar.

Pelo que acabamos de demonstrar concluimos que *a área de um prisma recto avalia-se multiplicando o perimetro da base pela altura do prisma.*

Notaremos que nos corpos que temos considerado não entram as áreas das suas bases.

127. A área de qualquer polyedro avalia-se, sommando as áreas das suas faces.

128. *A área da superficie lateral de um cylindro avalia-se multiplicando a circumferencia de uma das bases pela altura do cylindro.* Como sabemos, as bases do cylindro são os limites dos polygonos regulares inscriptos e circumscriptos quando se duplicam successivamente o numero de lados d'esses polygonos, com os quaes podemos determinar prismas regulares inscriptos e circumscriptos ao cylindro (que se póde considerar um prisma regular de um grande numero de lados) e cujas faces quasi se confundem com a superficie lateral do cylindro. Temos, pois, que designando por A a área da superficie lateral do cylindro, por C a circumferencia da base, e por a a altura do cylindro, temos

$$A = C \times a$$

Para obtermos a superficie total do cylindro, teremos de accrescentar a área das bases. Designando egualmente por A a superficie total do cylindro, temos

$$A = 2 \times \pi\, r^2 + C \times a$$

ou $A = 2 \times \pi\, r^2 + 2\,\pi\, r \times a$

d'onde tiramos $A = 2\,\pi\, r\,(r + a)$, isto é, *a área total do cylindro avalia se multiplicando a circumferencia da base, pela somma do raio da base com a altura do cylindro.*

129. A área de um tronco de cylindro recto avalia-se multiplicando a circumferencia da base pelo eixo.

130. *A área da superficie convexa de um cóne avalia-se multiplicando metade da circumferencia da base pela aresta.* Se inscrevermos e circumscrevermos na base do cóne polygonos regulares, e se duplicarmos successivamente os lados d'esses polygonos, temos que a mencionada base é o limite para que tendem esses polygonos com os quaes podemos determinar pyramides regulares inscriptas e circumscriptas ao cóne, que podemos considerar uma pyramide regular de um grande numero de faces que quasi se confundem com a superficie convexa do cóne.

Temos, pois, que designando por A a área da superficie convexa do cóne, por C a circumferencia da base e por L a sua aresta, temos $A = \frac{1}{2} C \times L$ ou $\pi r \times L$.

Para obtermos a superficie total do cóne, teremos de accrescentar á expressão acima determinada πr^2 que é a da base do cóne; logo, designando egualmente por A a superficie total do cóne, temos

$$A = \pi r \times L + \pi r^2$$

ou

$$A = \pi r (L + r)$$

isto é, *a superficie total de um cóne avalia-se multiplicando metade da circumferencia da base pela somma da aresta com o raio da base.*

131. *A área de um tronco de cóne recto avalia-se multiplicando metade da somma das circumferencias das bases pela aresta do tronco.* Seja o tronco de cóne $A B C D$ (fig. 65); e designemos por A a área da superficie lateral, R o raio $O C$ da base, e r o raio $o A$ da outra base. Temos que inscrevendo e circumscrevendo nas bases do tronco do cóne polygonos regulares, e se duplicarmos successivamente os lados d'esses polygonos, as ditas bases são os limites para que tendem esses polygonos, com os quaes podemos determinar (fazendo passar planos pelos lados parallelos dos polygonos) troncos de pyramides regulares inscriptos e circumscriptos no tronco do cóne, que podemos considerar um tronco de pyramide regular de um grande numero de faces que quasi se confundem com a superficie convexa do tronco do cóne. Mas, como acima dissémos, a área do tronco de uma pyramide regular avalia-se

multiplicando metade da somma dos perimetros das bases pela altura de um dos trapezios faces do tronco; será a área da superficie lateral do tronco de cóne determinada pela expressão $A = (\pi R + \pi r) \times \times A C$, isto é, metade da somma das circumferencias das bases pela aresta $A C$ do tronco.

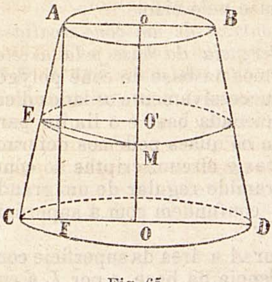


Fig. 65

A área de um tronco de cóne recto tambem se póde avaliar *multiplicando pela aresta do tronco a circumferencia da secção equidistante das bases do tronco*, pelo que temos a expressão da área $A = 2\pi \times O E' \times A C$ (*a*)

Como se vê $O' E$ é o raio da circumferencia da secção parallela que podemos designar por r; temos pois $A = 2\pi r \times A C$.

132. Podemos tambem determinar *a área da superficie lateral de um tronco de cóne multiplicando a altura do tronco pela circumferencia, cujo raio é a perpendicular ao meio da aresta, comprehendida entre esta e o eixo do tronco.* Seja o tronco de cóne $A B C D$ (fig. 65), do ponto A baixe-se a perpendicular $A F$ sobre a base, e do ponto E que divide ao meio a aresta $A C$ tire-se a perpendicular $E M$; temos determinados dois triangulos rectangulos similhantes $A F C$ e $E O' M$, d'onde tiramos

$$\frac{E M}{A C} = \frac{O' E}{A F} \text{ ou } O' E \times A C = E M \times A F$$

multiplicando ambos os membros por 2π temos

$$2\pi \times O' E \times A C = 2\pi \times E M \times A F$$

mas $2\pi \times O' E \times A C$ é a área do tronco (*a*) (131); logo o segundo membro da egualdade será a área do tronco, isto é,

$$A = 2\pi \times E M \times A F$$

a circumferencia do raio $E M$ multiplicada pela altura $A F$ do tronco, o que se desejava demonstrar.

133. *A área da esphera avalia-se multiplicando o seu diametro pela circumferencia de um circulo maximo.* Pelo que temos dito, facilmente se applica o principio de que a área da esphera é o limite commum das áreas dos cónes e troncos de cónes inscriptos e circumscriptos produzidos duplicando suc-

cessivamente o numero de lados dos polygonos inscriptos e circumscriptos ao circulo maximo, e avaliando as áreas d'esses cónes e troncos de cónes, como fizemos no numero anterior, sommando-as e tirando a circumferencia do circulo maximo, que é factor commum, temos, designando por A a área da esphera: $A = 2r \times 2\pi r$.

D'esta expressão tiramos $A = 4\pi r^2$ (a); isto é, a superficie da esphera é egual a quatro circulos maximos. Egualmente da expressão $A = 2r \times 2\pi r$ tiramos $A = \pi \times \overline{D^2}$, designando D o diametro, pelo que concluimos que a área da esphera é egual ao producto de π pela segunda potencia do diametro.

Da expressão (a) conhecida a superficie da esphera podemos determinar o raio, isto é,

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

134. *As áreas das espheras estão entre si como os quadrados dos raios.* Da expressão $A = 4\pi r^2$ e designando por a a área de outra esphera de raio r' temos $a = 4\pi r'^2$, d'onde tiramos:

$\frac{A}{a} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2}$ d'onde $\frac{A}{a} = \frac{r^2}{r'^2}$ o que se desejava demonstrar.

135. *A área de uma calotte avalia-se multiplicando a sua altura pela circumferencia de um dos circulos maximos da esphera.* Designando por A a área da calotte de altura h, temos $A = 2\pi r \times h$, o que facilmente se demonstra attendendo ao que dissémos quando tratámos da esphera.

136. *A área de uma lunula avalia-se multiplicando a da esphera pela relação entre o angulo espherico da lunula e quatro angulos rectos.* As lunulas sphericas são proporcionaes aos seus angulos sphericos; temos pois que as superficies da lunula e da esphera estão entre si como o numero de graus do angulo correspondente á lunula e quatro angulos rectos; e designando por L a superficie da lunula, A a da esphera, e n° o numero de graus do angulo espherico da lunula, temos:

$\frac{L}{A} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$ ou $\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$ d'onde tiramos

$L = 4\pi r^2 \times \frac{n^\circ}{360^\circ}$, o que se desejava demonstrar.

137. Sendo a *zona* egual á differença de duas calottes a

sua *área avalia-se multiplicando a sua altura pela circumferencia de um circulo maximo.*

138. *A área de um triangulo espherico é expressa pelo excesso da somma dos tres angulos do triangulo sobre dois rectos, sendo o angulo recto a unidade angular e o triangulo tri-rectangulo a unidade de superficie.* Seja $A\,B\,C$ o triangulo espherico (fig. 66), e prolonguem-se os lados até completarem as circumferencias; temos que $A\,C\,B + A\,C\,B'$ é egual á lunula B, $A\,C\,B + A\,B\,C'$ é egual á lunula C, e $A\,C\,B + A\,C'\,B$ é egual á lunula A; sommando estas egualdades temos,

$$2\,A\,C\,B + (A\,C\,B + A\,C\,B' + A\,B\,C' + A\,C'\,B') =$$
$$= 2\,(B + C + A), \text{ d'onde tiramos } 2\,A\,C\,B + 4 =$$

$= 2\,(B + C + A)$ ou $A\,C\,B = B + C + A - 2$, o que se desejava demonstrar.

139. Designando por A, A', A'', A''' e A'''' as áreas do tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro inscriptos n'uma esphera de raio conhecido, as seguintes expressões determinam o valor d'essas áreas:

$$A = \frac{8 \times r^2 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$A' = 8 \times r^2$$

$$A'' = 4 \times r^2 \times \sqrt{3},$$

$$A''' = 2 \times r^2 \times \sqrt{10\,(5 - \sqrt{5})}$$

$$A''' = 2 \times r^2 \times \left(5\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$$

140. Medir o volume de um corpo é conhecer quantas vezes este contêm outro conhecido, o qual se considera como unidade. A unidade de medida é o cubo cuja aresta é egual á unidade linear, e divide-se esta unidade em mil decimetros cubicos, cada decimetro em mil centimetros cubicos e cada um d'estes em mil millimetros cubicos. Dá-se o nome de solidos *equivalentes* aos que têem volumes eguaes sob fórmas differentes.

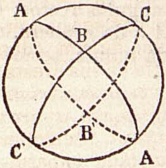


Fig. 66

141. *São equivalentes dois parallelipipedos quando têem uma face commum e as faces oppostas a esta n'um mesmo plano, comprehendidas entre duas parallelas.* Sejam os parallelipipedos $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$

e $LBCONMGH$ (fig. 67), que têem a face commum $BGHC$ e as oppostas $ADEF$ e $LMNO$ no mesmo plano e comprehendidas entre as parallelas AO e FN. Temos que o parallelipipedo $ABCDEFGH$ compõe-se do prisma triangular $ABLGFM$ e do tronco $BCDLMEHG$, e o outro parallelipipedo $LBCONMGH$ compõe-se do mesmo tronco e do prisma triangular $DCOENH$; mas, visto os dois prismas serem eguaes (72) concluimos que os dois parallelipipedos considerados são equivalentes, o que se desejava provar.

142. *Os volumes de dois parallelipipedos rectangulos são proporcionaes aos productos das suas bases pelas suas alturas.* A demonstração é similhante á que apresentamos em o n.º 132 da *Geometria Plana*. Este principio pode generalizar-se considerando quaesquer parallelipipedos, visto poderem-se determinar parallelipipedos rectangulos e equivalentes a estes, de bases equivalentes e da mesma altura.

143. *O volume de um parallelipipedo avalia-se multiplicando a base pela altura.* Designando por P o volume de um parallelipipedo de base B e altura H, e p outro parallelipipedo de base b e altura h, temos, pelo que acima dissémos,

$$\frac{P}{p}=\frac{B\times H}{b\times h} \text{ ou } \frac{P}{p}=\frac{B}{b}\times\frac{H}{h}$$

Se fôr, porêm, o parallelipipedo p a unidade de volume, será a sua base a unidade de superficie, e a sua aresta a unidade linear; logo temos

$$\frac{P}{1^{v}}=\frac{P}{1^{s}}=\frac{H}{1^{l}}$$

isto é, $P=B\times H$, o que se desejava demonstrar.

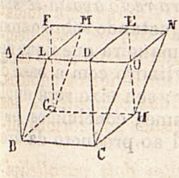


Fig. 67

Pelo que acabamos de dizer se deduz que o volume de um parallelipipedo rectangulo é egual ao producto das tres arestas de um dos seus angulos solidos, e o volume de um cubo egual á terceira potencia da sua aresta.

144. *O volume de um prisma triangular avalia-se multiplicando a área da base pela sua altura.* Qualquer prisma triangular é metade do parallelipipedo de base formada por dois triangulos eguaes á base do prisma e que tenha a mesma altura; logo o seu volume é metade da base d'este parallelipi.

pedo (que é a base do prisma) multiplicada pela sua altura, o que se desejava provar.

145. *O volume de qualquer prisma avalia-se multiplicando a área da base pela sua altura.* Todo o prisma se pode decompôr em prismas triangulares da mesma altura; e, avaliando a área de cada um d'estes prismas, temos que a somma d'essas áreas, isto é, a área do prisma proposto, é egual ao producto da sua base pela altura.

146. *O volume de um tetraedro é a terça parte do prisma triangular da mesma base e da mesma altura.* Unindo o ponto C com D e E (fig. 63) e o ponto D com B, facilmente se vê o tetraedro $CDFE$, que tem a mesma base e a mesma altura do prisma $ABCDEF$; temos mais os tetraedros $CABD$ e $CBDE$, que têem egualmente a mesma base e altura; portanto o prisma compõe-se de tres tetraedros equivalentes, isto é, o volume de um tetraedro é a terça parte do prisma triangular da mesma base e da mesma altura, o que se desejava provar. Pelo que dissemos, temos que o volume de um tetraedro é egual á terça parte do producto da base pela sua altura.

147. *O volume de qualquer pyramide é egual á terça parte do producto da base pela sua altura.* Qualquer pyramide póde decompor-se em tetraedros cujos volumes são respectivamente eguaes a um terço do producto da base pela sua altura (146); e, visto o volume da pyramide ser equivalente á somma dos volumes dos tetraedros, concluimos que o seu volume será egual á terça parte do producto da base pela sua altura. O volume de um tronco de pyramide é egual ao producto de um terço da altura pela somma das áreas das suas bases e da meia proporcional entre estas.

148. *O volume de um cylindro avalia-se multiplicando a área da base pela sua altura.* Deduz-se facilmente a verdade d'este principio, attendendo ao que dissemos no § 145.

149. *O volume de um tronco de cylindro recto avalia-se multiplicando a área da sua base pelo eixo.* Ajustando sobre o tronco de cylindro dado um outro egual, de maneira que fique determinado um cylindro, teremos um cylindro com a base do tronco cujo volume queremos conhecer; seu eixo será duplo do eixo do tronco assim como o seu volume; concluimos, portanto, que o volume do tronco é egual ao producto da área da sua base pelo eixo.

150. *O volume de um cóne é egual a um terço da sua altura multiplicado pela área da sua base.* Deduz-se facilmente a verdade d'este principio, attendendo ao que dissemos no § 147. O tronco de um cóne, cujas bases são parallelas, é egual a um

terço da sua altura multiplicado pela somma das suas bases e da meia proporcional entre ellas.

151. Os volumes de cylindros similhantes e de cónes similhantes estão entre si como os cubos dos raios das suas bases ou como os cubos das suas alturas ou eixos.

152. Se considerarmos uma esphera constituida ou formada por muitas pyramides cujos vertices concorram n'um mesmo ponto (centro da esphera), e determinando cada uma das bases d'essas pyramides uma pequena porção da superficie exterior da esphera, cujo raio será a altura de uma e de todas as pyramides, temos que o volume de uma das pyramides que consideramos será egual á base multiplicada por um terço do raio; concluimos que o *volume da esphera*, egual á somma dos volumes de todas as pyramides, será *egual á sua área multiplicada pela terça parte do raio*. Designando por V o volume de uma esphera de raio r, sabendo que a expressão da sua área é $4\pi r^2$, temos $V = 4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se designarmos por D o diametro da esphera, será $r = \frac{D}{2}$ e o seu volume $V = \frac{1}{6}\pi \times D$.

153. Sendo conhecido o raio r de uma esphera, podemos calcular pelas seguintes expressões o volume V do tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, inscriptos n'essa esphera; e, designando pela ordem acima indicada as expressões dos volumes dos mencionados polyedros, temos;

$$V = \frac{8}{27} r^3 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{8}{9} r^3 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{4}{3} r^3$$

$$V = \frac{2}{9} r^3 \sqrt{10\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

$$V = \frac{2}{3} r^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

154. *Os volumes da esphera, do cylindro e do cóne equilateros circumscriptos, estão entre si como os numeros 4, 6 e 9.* Temos que $2\pi r^3$ será o volume do cylindro circumscripto, $3\pi r^3$ o do cóne. Teremos, portanto, $\frac{4}{3} \pi r^3 : 2\pi r^3 : 3\pi r^3$. Isto é, o volume da esphera, do cylindro e do cóne circumscriptos estão entre si como $\frac{4}{3} : 2 : 3 = 4 : 6 : 9$, o que se desejava.

155. *Os volumes da esphera, do cylindro e do cóne equilateros inscriptos, estão entre si como 32, $12\sqrt{2}$ e 9.* Designando seguidamente ao volume da esphera, o do cylindro equilatero inscripto e o do cóne, temos:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{\pi r^3 \sqrt{2}}{2} : \frac{3\pi r^3}{8} = 32 : 12\sqrt{2} : 9$$

o que se desejava provar.

156. *O volume de um sector espherico avalia-se multiplicando pelo terço da área da calotte o raio da esphera.* Designando por V o volume de um sector, temos

$$V = \frac{1}{3} r \times 2\pi r \times h$$

$$\text{isto é, } V = \frac{2\pi r^2}{3} \times h$$

157. *O volume de um segmento é egual á differença entre o volume do sector e do cóne que lhe corresponde.* Designando por R o raio da esphera, h a altura do segmento e r o raio da base, temos representado por V o volume do segmento:

$$V = \frac{2\pi R^2}{3} \times h - \frac{\pi r^2}{3} (R - h)$$

d'onde tiramos

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$$

158. *O volume de uma cunha espherica avalia-se multiplicando o terço da lunula correspondente pelo raio da esphera.*

159. Pelo que acima dissémos, concluimos que o volume do cylindro recto circumscripto á esphera é meio proporcional entre o volume da esphera e o do cóne, e do mesmo modo o volume do cylindro inscripto é meio proporcional entre o volume da esphera e o do cóne.

160. Os volumes das espheras são proporcionaes aos cubos dos seus raios.

161. *Os volumes de pyramides similhantes são proporcionaes aos cubos das suas arestas homologas.* Considerem-se as pyramides similhantes $VABCDEF$ e $Vabcdef$ (fig. 31) cujas alturas VO e Vo são linhas homologas, e teremos

$$(a)\ \frac{VO}{Vo} = \frac{AB}{ab} = \dots .$$

e designando por V o volume da primeira pyramide que consideramos, e por v o volume da segunda, temos

$$\frac{V}{v} = \frac{ABCDEF \times VO}{abcdef \times Vo} \quad (b)$$

Mas, visto ser

$$\frac{ABCDEF}{abcdef} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} \text{ teremos } (b)$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\overline{AB}^2 \times VO}{\overline{ab}^2 \times Vo}$$

Logo (a) vem o que se desejava demonstrar, isto é,

$$\frac{V}{v} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}$$

Decompondo polyedros similhantes em egual numero de tetraedros similhantes, cujos volumes são proporcionaes aos cubos de arestas homologas, facilmente se deduz o seguinte principio: *Os volumes de dois polyedros similhantes são proporcionaes aos cubos das suas arestas homologas.*

162. Para se determinar o volume de qualquer polyedro irregular, decompõe-se em outros, cujos volumes se possam determinar pelos principios estabelecidos.

FIM