Gu 1114

PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

ILLUSTRADA COM 47 FIGURAS
e contendo além do programma official do
Curso Geral dos Lyceus
muitas indicações adaptadas ao
Curso da Escola Polytechnica

QUARTO ANNO — DUODECIMA SERIE

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada, — e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

1885
DAVID CORAZZI, EDITOR
EMPREZA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de oiro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração: 40, R. da Atalaya, 52, Lisboa
Filial no Brazil: 40, R. da Quitanda Rio de Janeiro

NUMERO
96

CADA VOLUME 50 REIS

CADA VOLUME 50 REIS

ERRATAS

Pag.	Linha	Onde se lê	Leia-se
28	38 a 39	ponto a'	ponto (a, a')
30	5	a problema	o problema
»	7	$a' p' m$	$a' p' m'$
31	34 a 35	com o o plano	com o plano
33	43	as traços	os traços
36	44	auxilar	auxiliar
37	12	conhecido.	conhecidos.
»	30	$a' b'$	$a' b_1'$
38	1	contar-se	cortar-se
39	3	$(m' e' m e)$	$(m' e', m e)$
42	30 a 31	*ponto um plano*	*ponto a um plano*
43	31	$m m'$	(m, m')
45	21	$c c'$	(c, c')
47	4 a 5	os angulos	o angulo
»	5	$(a b, a b'$	$(a b, a' b')$

N. B.—*Passim*, onde por equivoco typographico se incontrar a palavra *intercessão*, leia-se *intersecção*.

EMENDAS A FAZER NAS FIGURAS

Fig. 26 — Mudar para m' a lettra m que está acima de $L T$.
Indicar por h' o ponto onde a horizontal $p' m'$ incontra $a a'$.

Fig. 38 — Traçar (com traço cheio) rectas unindo c com m e c' com m'.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

PREFACIO

A *Geometria Descriptiva* pode considerar-se como *arte* ou como *sciencia*.

Os processos empregados pelos *apparelhadores* da pedra e pelos *carpinteiros* para traçarem as suas figuras são verdadeiramente ingenhosos e conhecidos desde muito tempo; pertenciam á *arte das projecções*. Mas só depois dos trabalhos do celebre Monge, no fim do ultimo seculo, a Geometria Descriptiva foi considerada como sciencia. Foi Monge quem primeiro demonstrou que, no que se chamava a *arte das projecções*, existia verdadeiramente um methodo, que permittia descobrir e demonstrar as propriedades do espaço figurado. Monge empregava, na investigação das propriedades das *fórmas geometricas*, o *methodo das projecções*, como Descartes empregava a *analyse*, na investigação das verdades da Geometria.

Se notarmos que as superficies são compostas de linhas e que estas são formadas de pontos, e que o papel que o plano representa, junto das outras superficies, é muitas vezes de grande importancia, dando em muitos casos uma idéa bem clara das superficies cujas propriedades se estudam, e em relação ás quaes elle é considerado como plano tangente ou secante, ou quando se considera como plano tangente ou normal de qualquer curva traçada sobre a superficie que se pretende estudar, convencer-nos-hemos facilmente de que, quando se souber representar um ponto, uma recta ou um plano, pelo methodo das projecções, e resolver por este methodo as questões que se podem propôr relativamente ao ponto, á recta e ao plano, não devemos ter duvida em affirmar, como muitas vezes o affirmou Monge, que se sabe a *Geometria Descriptiva*.

Devemos ainda accrescentar que a Geometria Descriptiva e a Analyse se completam, resolvendo a primeira especialmente os problemas de *relação de posição*, emtanto que a segunda resolve os de *relação metrica*.

Ponderava Monge que, sendo a Geometria Descriptiva a *linguagem do ingenheiro*, é necessario aprender a lêl-a e escrevêl-a.

CAPITULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

Generalidades

Objecto da Geometria Descriptiva.—Para que a rapidez admiravel dos progressos das sciencias e das artes seja proveitosa, é indispensavel que, apar d'esses progressos, se desinvolvam e aperfeiçoem, sem cessar, os meios de transmittirmos e fazermos comprehender mutuamente, entre nós, as fórmas dos differentes corpos, para que aquelle que n'elles descobrir novas relações geometricas, as possa manifestar aos outros homens, podendo mais guiar o artista na execução da reproducção d'esses corpos, n'uma dada escala.

Para chegar a este resultado, pode-se empregar a *descripção graphica* dos corpos; e é n'esta mesma descripção graphica que se incontra o primeiro objecto da Geometria Descriptiva, cujos methodos se generalizarão, em seguida, tornando-se, por um lado, excellentes meios de descobrir novas propriedades da extensão, e, por outro lado, fornecerão processos simples, para resolver numerosos problemas de estereotomia, fortificação, perspectiva, etc.

Nada mais simples que executar as construcções graphicas nos problemas de Geometria Plana, visto que, ahi, as linhas e os pontos se acham todos sobre a mesma folha do desenho; mas quando deixamos de considerar apenas os pontos e as linhas planas, para nos occuparmos dos corpos e das linhas de dupla curvatura (linhas curvas que não teem todos os seus pontos no mesmo plano), ver-nos-hemos obrigados a fazer traçados no espaço; notemos que, falando em absoluto, esses traçados não são impossiveis, e em muitas artes se tem visto operar d'esse modo, mas só excepcionalmente. E, de uma maneira geral, podemos dizer que, para que uma questão proposta possa ser resolvida graphicamente, é indispensavel que, por qualquer meio, ella seja reduzida a um problema de Geometria Plana. E' pois necessario um methodo que permitta representar *sobre um unico plano, e sem indeter-*

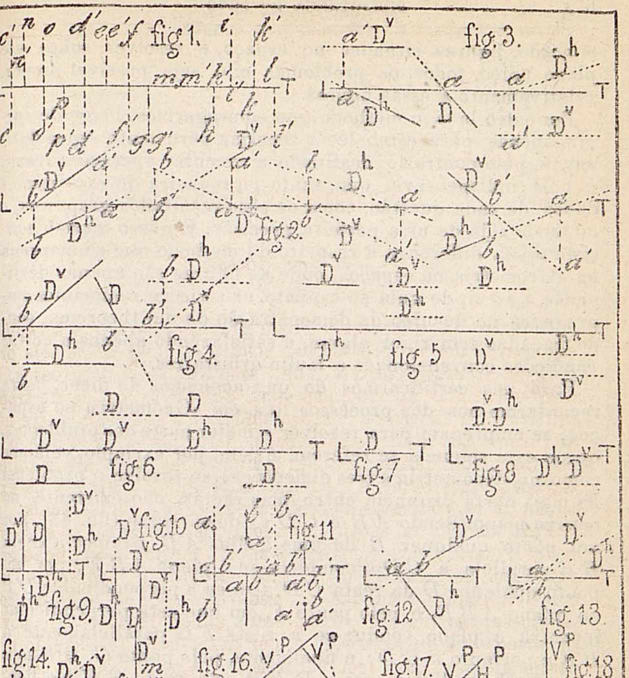
fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5
fig. 6.
fig. 7
fig. 8
fig. 9.
fig. 10
fig. 11
fig. 12
fig. 13.
fig. 14.
fig. 15
fig. 16.
fig. 17.
fig. 18
fig. 19.
fig. 20
fig. 21
fig. 22
fig. 23.
fig. 24
fig. 25

minação, figuras situadas no espaço, e resolver, sobre esse plano unico, todos os problemas que seja possivel propôr, relativamente a essas figuras.

Por outro lado, o methodo que empregarmos, longe de servir apenas para estabelecer theorias puramente especulativas, é, pelo contrario, destinado a executar operações reaes; é pois indispensavel que, tanto na maneira de exprimir os dados de cada questão, como os seus resultados graphicos, o methodo seja de uma perfeita precisão. E n'isso mesmo consiste a sua differença a respeito do methodo que se emprega na «Geometria no espaço», onde as figuras são apenas destinadas a servir de guia ao espirito, na serie de raciocinios empregados no decurso da demonstração de um theorema, sendo traçadas sem rigor algum, e satisfazendo apenas a certas condições convencionaes e muito arbitrarias.

Para nos certificarmos do que acabamos de dizer, basta recordarmo-nos dos processos que, em «Geometria no espaço», se empregam para resolver a maior parte dos problemas, que a essa sciencia se referem. Assim, por exemplo, vejamos como, na «Geometria a tres dimensões», se resolve o problema da mais curta distancia entre duas rectas, não existentes no mesmo plano. Sendo AB e CD as duas rectas (fig. 43), por um ponto qualquer B de uma d'ellas AB, tiramos a recta BE parallela a CD e completa-se o plano ABE; por um ponto qualquer D da recta CD, tira-se a perpendicular DF ao plano ABE, e pelo ponto F, em que esta perpendicular incontra o plano, conduz-se a recta FG parallelamente a BE e portanto a CD; e finalmente, pelo ponto G, tira-se a recta GH parallelamente a DF, e esta recta GH é a perpendicular commum ás duas rectas, e representa a mais curta distancia pedida; mas, como se vê, todas as operações necessarias para resolver o problema foram apenas indicadas, sem que nenhuma fôsse realmente executada, senão de uma maneira muito arbitraria,—emtanto que a Geometria Descriptiva, como teremos occasião de vêr, resolve este problema, ainda empregando a serie de operações indicadas, mas fazendo *realmente* as construcções graphicas, *sem indeterminação* ou arbitrariedade de qualquer especie. O mesmo poderiamos fazer sobresahir a respeito de muitos outros problemas de «Geometria no espaço»: citamos, para exemplo, aquelle em que se trata de achar o centro e o raio da esphera, obrigada a passar por quatro pontos dados; indica-se, é verdade, a serie de operações que seria necessario executar, para chegar á resolução do problema, mas as operações não são

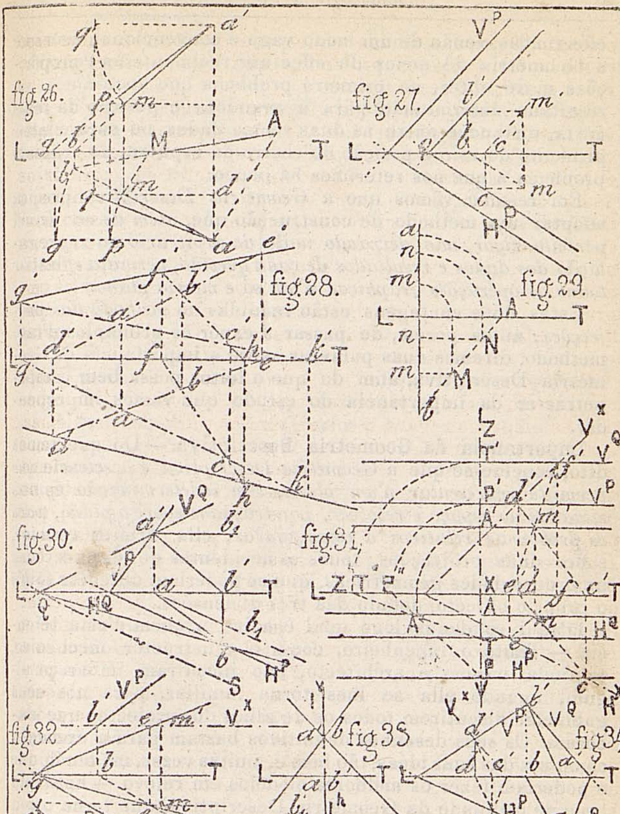
fig. 26.
fig. 27.
fig. 28.
fig. 29.
fig. 30.
fig. 31.
fig. 32
fig. 33
fig. 34
fig. 35
fig. 36.
fig. 37.

effectuadas, senão de um modo vago e convencional, sem que a Geometria dê meios de effectuar realmente as construcções e de obter, no primeiro problema que apontámos, um resultado determinado para a grandeza e posição da mais curta distancia entre as duas rectas dadas, ou para o comprimento do raio e posição do centro da esphera, no segundo problema a que nos referimos ha pouco.

Em resumo, vêmos que a *Geometria Descriptiva* precisa adoptar um methodo de construcção que, *além de ser de um perfeito rigor, não deixando nada de arbitrario na representação dos dados e resultados de cada questão, permitta effectuar todas as operações graphicas n'um só e mesmo plano.*

Estas duas vantagens estão reunidas no *methodo das projecções;* antes porêm, de passar a expôr os principios d'este methodo, diremos duas palavras sobre a importancia da Geometria Descriptiva, afim de que o leitor possa bem compenetrar-se da importancia do estudo que vamos imprehender.

Importancia da Geometria Descriptiva. — Do que temos dito, conclue-se que a *Geometria Descriptiva é a sciencia que permitte representar n'um plano, sem indeterminação figuras situadas no espaço e resolver, por traçados sobre o plano, todos os problemas relativos a estas figuras;* ella permitte estudar, sobre duas projecções, todos os accidentes de fórma e todas as propriedades geometricas, que se poderiam observar sobre o proprio objecto, dotado das tres dimensões..

D'aqui se deduz logo qual é a importancia d'esta sciencia. — Tanto o ingenheiro, como o constructor mechanico, e ainda mesmo o architecto, não incontram imbaraço algum, quando ella se lhes torna familiar, para nos seus gabinetes discutirem todos os detalhes dos projectos que elaboram. Os seus desenhos definitivos bastam para a execução completa das suas idéas, tão bem e, muitas vezes, melhor do que o poderiam fazer os melhores modelos em relevo.— Este alto grau de utilidade da Geometria Descriptiva, que torna o seu estudo tão necessario, não é a sua unica propriedade caracteristica; os seus methodos practicos não poderiam ser ignorados por artista algum; mas, alêm d'isso, ella é para o geometra uma sciencia de investigação, em toda a accepção da palavra; e, se os meios de que ella dispõe offerecem, muitas vezes, menos generalidade que os recursos da analyse, ella gosa, em compensação, da immensa vantagem de ferir mais vivamente a imaginação, e chegar muitas vezes ao mesmo resultado, por methodos mais elegantes e mais simples.

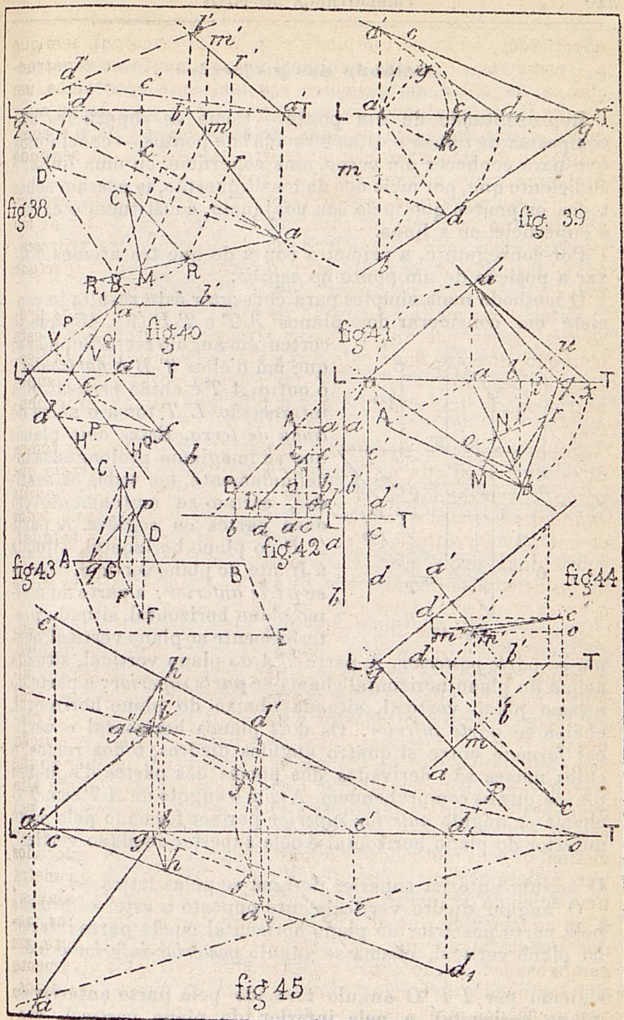
fig 38.
fig. 39
fig 40
fig 41
fig 42
fig 43
fig 44
fig 45

Methodo das projecções

Representação de um ponto. — Como as superficies são compostas de linhas e estas formadas de pontos, — concluimos que para conhecer um corpo, uma superficie, ou uma linha, é sufficiente que, por meio dos dados da questão, se possam achar todos os pontos que, pelo seu conjuncto, constituem o corpo, a superficie, ou a linha.

Por conseguinte, a primeira cousa de que trataremos é fixar a posição de um ponto no espaço.

O methodo mais simples para conseguir este resultado consiste em considerar dois planos *A T* e *T B* (fig. 46) que se cortem em angulo recto. Suppõe-se que um d'elles *T B* é *horizontal*; o outro *A T* é então *vertical*. Sua intercessão *L T* toma o nome de *linha de terra*. Estes dois planos que se imaginam prolongados indefinidamente, em todos os sentidos, cortam-se mutuamente em duas partes ou regiões. A parte *T B* do plano horizontal, situada á frente do plano vertical, chama-se *parte anterior*; a parte do mesmo plano horizontal, situada posteriormente ao plano vertical, chama-se *parte posterior*. A parte *T A* do plano vertical, situada acima do plano horizontal chama-se *parte superior*; a parte do mesmo plano vertical, situada abaixo do plano horizontal, chama-se *parte inferior*. Os dois planos horizontal e vertical formam entre si quatro angulos diedros, todos rectos, e cujos nomes são derivados dos nomes das partes d'aquelles planos que os comprehendem. Assim o angulo de *A T* com *T B* chama-se angulo *anterior superior* por ser formado pela parte anterior do plano horizontal e pela superior do plano vertical.

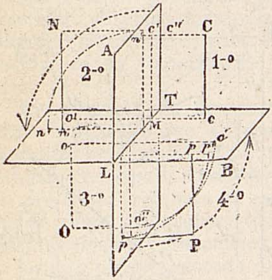

Fig. 46

O angulo anterior superior designa-se pelas lettras $\widehat{AS}$.

O angulo diedro verticalmente opposto a este, e formado pela parte posterior do plano horizontal e pela parte inferior do plano vertical, chama-se angulo *posterior-inferior* e é designado por $\widehat{PI}$. O angulo formado pela parte anterior do plano horizontal e pela inferior do plano vertical, chama-se angulo *anterior-inferior*, e designa-se por $\widehat{AI}$. O angulo verticalmente opposto a este ultimo de que falámos, e que é formado pela parte posterior do plano horizontal e pela superior do plano vertical, chama-se angulo *posterior-superior* e designa-se por $\widehat{PS}$.

Postas estas noções, se de um ponto C do espaço baixarmos uma perpendicular Cc sobre o plano horizontal TB, o pé c d'esta perpendicular é a *projecção horizontal* do ponto C; do mesmo modo, se baixarmos Cc' perpendicular ao plano vertical AT, o pé c' d'esta recta é a *projecção vertical* do ponto C; a perpendicular Cc ao plano horizontal é a *linha projectante horizontalmente* do ponto C; a perpendicular Cc' ao plano vertical é a *linha projectante verticalmente* do ponto C. Se conduzirmos um plano pelas rectas Cc e Cc', a figura $CcMc'$ contida n'este plano é evidentemente um rectangulo; além d'isto, como este plano passa por duas rectas respectivamente perpendiculares aos planos de projecção, podemos concluir que elle é perpendicular a estes dois planos, e por conseguinte á sua intercessão LT. Portanto podemos tirar as seguintes conclusões:

1.ª A distancia Cc do ponto C ao plano horizontal é egual á distancia $c'M$ da sua projecção vertical á linha-de-terra LT.

2.ª A distancia Cc' do ponto C ao plano vertical é egual á distancia cM da sua projecção horizontal á linha-de-terra.

3.ª Se das duas projecções c e c' de um mesmo ponto C do espaço se baixam perpendiculares cM e $c'M$ á linha-de-terra LT, estas duas perpendiculares incontram-n'a em um mesmo ponto M.

A posição no espaço de um ponto C *é determinada pelo conhecimento das projecções* c *e* c' *d'este ponto.*— Effectivamente, o ponto deve achar-se sobre uma perpendicular Cc ao plano horizontal TB, elevada pela projecção horizontal c, e a uma distancia egual a Mc'; logo tomando $cC = Mc'$, o ponto C é o ponto procurado. Tambem se obteria o mesmo ponto C do espaço tomando $c'C = Mc$, sobre uma perpendicular elevada, no ponto c', ao plano vertical AT. Finalmente, vimos que as perpendiculares aos planos AT e BT estão no mesmo plano, quando passam respectivamente pelos pontos c e c'; logo ellas cortam-se n'um ponto C, de que os pontos c e c' são as projecções.

Um ponto é tambem determinado pela condição de estar situado, ao mesmo tempo, sobre duas rectas, sobre tres planos, ou sobre uma recta e um plano; e o proprio facto de assignar a posição de um ponto pelas posições das suas duas projecções, equivale a dizer que o ponto está sobre duas rectas respectivamente perpendiculares aos planos de projecção, e conduzidas pelas projecções dadas d'esse ponto.

Como se vê, até agora, temos considerado dois planos perpendiculares entre si, mas dissémos que a Geometria Descriptiva trata de reduzir as construcções a serem executadas n'um unico plano; temos pois que procurar executál-as todas sobre a folha do desenho; para chegarmos a esse resultado, supporemos que o plano vertical $A\,T$ gira em-torno da linha-de-terra $L\,T$, como charneira, para se rebater sobre o plano horizontal $T\,B$, de tal modo, que a parte superior $A\,T$ do plano vertical assente sobre a parte posterior do plano horizontal, e que a parte inferior do plano vertical assente sobre a parte anterior $B\,T$ do plano horizontal. N'este movimento de rotação, que se effectua em-torno da linha-de-terra $L\,T$, como charneira, a projecção vertical c' do ponto C do espaço descreve um arco de circulo, cuja raio é a perpendicular $c'\,M$ á linha-de-terra; depois do rebatimento do plano vertical sobre o horizontal, o ponto c' toma a posição c' sobre a recta $c\,M$, que então fica no prolongamento de $c'\,M$; vê-se assim que, depois de effectuado o rebatimento, como foi dito, as duas projecções horizontal e vertical c e c' do mesmo ponto C do espaço, ficam situadas sobre uma recta $c\,c'$, que é perpendicular á linha de-terra $L\,T$. Vê-se pois que dois pontos tomados arbitrariamente sobre os dois planos de projecção, não representarão, em geral, as projecções de um mesmo ponto do espaço, e que, por conseguinte: *para que dois pontos* c *e* c', *situados um sobre o plano horizontal, e outro sobre o plano vertical de projecção, possam representar as projecções de um unico ponto* C *do espaço, é necessario que ambos estejam sobre uma mesma perpendicular* $c\,c'$ *á linha-de-terra.*

Como verificação, quando tivermos achado, independentemente uma da outra, as duas projecções de um mesmo ponto do espaço, ellas devem estar sobre a mesma perpendicular á linha-de-terra.

Designaremos um ponto no espaço por uma lettra maiuscula, a sua projecção horizontal pela lettra correspondente minuscula, e a projecção vertical pela mesma lettra minuscula com uma plica. Assim o ponto C do espaço é aquelle que tem para projecções horizontal e vertical respectivamente os pontos c e c' e designa-se por (c, c').

Olivier segue outra notação que convem conhecer, posto que, por não ser mais simples, nem mais clara que a precedente, a não adoptemos; designa um ponto no espaço por uma lettra minuscula, e as suas projecções pela mesma lettra com o indice superior (em fórma de expoente) h ou v, conforme se trata da projecção horizontal ou da vertical.

Como em Geometria Descriptiva um ponto é determinado pelas suas duas projecções, quando se diz *que um ponto é dado*, deve intender-se que se tem o conhecimento tanto da projecção horizontal como da vertical d'este ponto. De um modo identico, quando se pede para achar um ponto no espaço, intende-se que se pede para achar as duas projecções, a horizontal e a vertical d'este ponto.

E' indispensavel habituarmo-nos a conhecer immediatamente a posição que um ponto occupa no espaço, quando conhecermos as suas duas projecções; e reciprocamente é preciso saber deduzir immediatamente, da posição conhecida de um ponto no espaço, as suas duas projecções.

Vejamos agora quaes são as posições distinctas que um ponto no espaço póde occupar, em relação aos dois planos de projecção, e qual o modo por que são modificadas as duas projecções do ponto, para cada uma das posições que elle pode occupar no espaço.

Alphabeto do ponto.—As diversas posições que um ponto pode occupar no espaço são indicadas pelas posições das suas duas projecções, em relação á linha-de-terra. Antes de ver quaes são essas posições, convem saber que os quatro diedros formados pelos dois planos de projecção prolongados indefinidamente tambem são chamados *quadrantes*. Assim o angulo *anterior-superior* constitue o *primeiro-quadrante*; o angulo *posterior superior* é o *segundo-quadrante*; o angulo *posterior-inferior* é o *terceiro-quadrante*; e o angulo *anterior-inferior* é o *quarto quadrante*.

Postas estas noções, vejamos quaes são as posições distinctas de um ponto no espaço em relação aos planos de projecção.

1.º O ponto pode estar n'um dos quatro angulos diedros formados pelos planos de projecção (isto é, pode estar n'um dos quatro quadrantes). Quando o ponto está no primeiro quadrante, é representado evidentemente com a projecção vertical acima da linha-de-terra e com a projecção horizontal abaixo da mesma linha; tal é o ponto (c, c') da fig. 1. Se o ponto está no segundo quadrante, e se attendermos ao modo por que se faz o rebatimento do plano vertical sobre o horizontal de projecção (ficando a parte superior do plano vertical sobre a parte posterior do plano horizontal), facilmente comprehenderemos que tanto a projecção horizontal como a vertical do ponto estarão, n'este caso, acima da linha-de-terra; é o que succede ao ponto (n, n') da fig. 1. Se o ponto, no espaço, está no terceiro quadrante, facilmente se percebe que depois do rebatimento do plano vertical sobre o horizontal, a projecção horizontal fica acima da linha-de-terra e a projecção vertical abaixo, como succede ao ponto (o, o') da mesma fig. 1. Finalmente, se o ponto está no quarto quadrante, é evidente que tanto a sua projecção horizontal como a vertical ficam abaixo da linha-de terra, como se vê para o ponto (p, p') da mesma fig. 1.

2.º Um ponto assim situado no interior de um dos quatro quadrantes, pode, n'esse quadrante, ter uma posição especial, distando egualmente dos dois planos de projecção (isto é, estando sobre o plano bissector do diedro em que está situado); n'este caso é evidente que as projecções do ponto distam egualmente da linha-de-terra; o ponto (d, d') da fig. 1 é um ponto do primeiro quadrante e que está situado sobre o plano bissector do diedro anterior superior; se mudarmos a plica para a projecção horizontal, as projecções representarão, como em (f, f'), um ponto situado sobre o plano bissector do terceiro quadrante (isto é, do angulo posterior-inferior), e que é o prolongamento do plano bissector do angulo anterior-superior; se o ponto está situado no plano bissector correspondente ao segundo quadrante, é evidente que as duas projecções (horizontal e vertical) se confundem n'um ponto unico acima da linha-de-terra, e este ponto unico designa-se então pelas duas lettras correspondentes ás duas projecções, como em (e, e'), fig. 1; se finalmente o ponto está no plano bissector do diedro anterior-inferior (isto é, do quarto quadrante), as suas duas projecções confundem-se n'um unico ponto collocado abaixo da linha-de-terra, e que se designa pelas duas lettras correspondentes ás duas projecções do ponto no espaço; é o que succede ao ponto (g, g') da fig. 1.

3.º Se o ponto está sobre a linha-de-terra, confunde-se com as suas duas projecções; é o que succede ao ponto (m, m') da fig. 1.

4.º Se o ponto está situado sobre um dos planos de projecção, elle é projecção de si mesmo sobre este plano, estando evidentemente a outra projecção sobre a linha-de-terra. Se, n'este caso, o ponto está sobre a parte anterior do plano horizontal, elle é representado como em (h, h') da fig. 1; se está na parte posterior do plano horizontal, tem a projecção horizontal confundida com elle proprio acima da linha-de-terra e a projecção vertical na linha-de terra; é o que succede ao ponto (i, i') da fig. 1; se o ponto está na parte superior do plano vertical, tem a projecção vertical confundida com elle proprio acima da linha de-terra e a projecção horizontal sobre aquella linha, como succede ao ponto (k, k') da fig. 1; se o ponto está na parte inferior do plano vertical, é representado como em (l, l') da fig. 1.

Em resumo, vemos que um ponto pode occupar no espaço treze posições notaveis, bem distinctas, em relação aos dois planos de projecção; quatro d'estas posições correspondem ao 1.º caso, quatro ao 2.º; uma ao 3.º, e quatro ao 4.º caso.

Representação da linha recta.—Imagine-se que se baixam perpendiculares de todos os pontos de uma recta sobre o plano horizontal; os pés d'estas perpendiculares são, como se disse, as projecções horizontaes dos differentes pontos da recta, e a linha que os une a todos é a *projecção horizontal da recta.* Como todas estas perpendiculares estão n'um unico plano, passando pela recta, e perpendicular ao plano horizontal de projecção, podemos dizer que a *projecção da recta é a intercessão do plano de projecção com um plano que lhe é perpendicular e passa pela recta.* Como isto mesmo é verdadeiro para qualquer plano de projecção, podemos dizer que a *projecção de uma recta é outra recta.*— Se quizermos pois ter as duas projecções de uma recta, não temos mais que conduzir por ella, planos respectivamente perpendiculares aos planos de projecção, e procurar a intercessão d'estes com aquelles.

D'estes planos que, passando pela recta, são respectivamente perpendiculares aos planos de projecção, chama-se *plano projectante horizontalmente da recta* o que é perpendicular ao plano horizontal, e *plano projectante verticalmente da recta* o que é perpendicular ao plano vertical de projecção.

D'esignaremos uma recta no espaço pelas lettras maiusculas de dois dos seus pontos e as projecções da recta pelas lettras correspondentes ás projecções d'estes dois pontos; assim a recta $A\ B$ no espaço é aquella que tem para projecções horizontal e vertical respectivamente as rectas $a\ b$ e $a'\ b'$ e será em geral designada por ($a\ b$, $a'\ b'$). Estes dois pontos serão, na maior parte dos casos, os dois pontos em que a recta incontra os planos de projecção, e que são chamados os *traços da recta* n'aquelles planos, designando-se por *traço vertical* o ponto em que a recta incontra o plano vertical, e por *traço horizontal* da recta o ponto em que ella atravessa o plano horizontal.

Muitas vezes é mais simples adoptar a notação de Olivier, designando uma recta no espaço por uma lettra maiuscula e as suas projecções horizontal e vertical pela mesma lettra, com os indices superiores *h* ou *v*, em fórma de expoente.

As duas projecções de uma recta definem a posição da recta no espaço.—Com effeito a recta no espaço é a intercessão de dois planos passando um pela projecção horizontal, e outro pela projecção vertical da recta e sendo respectivamente perpendiculares ao plano horizontal e ao vertical de projecção; de modo que dizer que uma recta é dada pelas suas duas projecções, equivale realmente a dizer que ella satisfaz á condição de existir sobre dois planos determinados, sendo por conseguinte a sua intercessão. Uma recta tambem é definida por dois dos seus pontos, visto que estes nos fornecem dois pontos de cada projecção. Em geral estes dois pontos são os *traços* da recta, como já se disse.

Regras a observar na maneira de representar as rectas nos desenhos.—E' conveniente estabelecer algumas regras, de constante applicação, no traçado das figuras da Geometria Descriptiva. Sendo os desenhos destinados a representar a fórma dos objectos, é necessario que as diversas linhas d'esses desenhos sejam traçadas por modo que tornem bem *legivel* o desenho, de maneira que se perceba facilmente a situação relativa das differentes partes do objecto representado, distinguindo-se com facilidade as partes d'elle que são visiveis, das que são occultas, para o observador que se suppõe em geral no 1.º quadrante, olhando para o objecto segundo uma perpendicular ao plano de projecção e collocado a uma distancia infinita d'esse objecto; é mais necessario que nos desenhos se distingam perfeitamente os dados e os resultados de cada problema das linhas que só foram empregadas como auxiliares para obter esses resultados.

Posto isto, apontaremos as seguintes regras:

1.º Chamam-se *linhas principaes* as que representam *os dados* ou *os resultados* de um problema; estas linhas podem ser *visiveis* ou *invisiveis;* no primeiro caso serão representadas por um *traço cheio* e continuo nas suas projecções; no segundo caso serão *pontuadas* (isto é, representadas por pontos redondos).

2.º Chamam-se *linhas auxiliares* aquellas que, apezar de não serem principaes, desimpenham comtudo na figura um papel importante; ellas são representadas por *linhas mixtas* (isto é, formadas de pequenos traços, separados entre si por um, dois, tres, ou mais pontos redondos).

3.º Chamam se *linhas de construcção* ou *de projecção* as que desimpenham na figura um papel pouco importante, suppondo se mesmo que ellas não existem; são representadas por linhas de *traço interrompido* ou *linhas interrompidas* (isto é, formadas de pequenos traços mais curtos e mais finos que os das linhas mixtas). Estas differentes especies de linhas estão representadas na fig. 47. Só resta saber como se distinguem as *linhas* ou partes de *linhas principaes* que são visiveis e representadas por traço cheio, das que são invisiveis e representadas por linhas pontuadas. Como dissémos, imagina-se, quando se trata da projecção horizontal, que o observador está collocado acima do plano horizontal, á frente do plano vertical, e a uma distancia infinita do plano horizontal. Do mesmo modo, suppõe-se que a projecção vertical é vista por um observador collocado a uma distancia infinita, sobre uma perpendicular ao plano vertical, elevada para deante d'este plano e acima do plano horizontal. Postas estas convenções, é facil de comprehender que se supporá invisivel toda a linha ou porção de linha situada quer atraz do plano vertical, quer abaixo do horizontal, quer uma e outra coisa; e uma tal linha ou porção de linha será representada como dissémos nas suas projecções por pontos redondos.

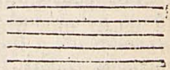

Fig. 47

Do mesmo modo, quando, como dado ou resultado de um problema, se suppõe um plano *realmente existente*, toda a linha ou porção de linha que ficar incoberta pelo plano em questão, para o observador, collocado como suppuzemos, será supposta invisivel e representada a pontos redondos, comtanto, porêm, que ella seja uma *linha principal* do desenho, visto que as linhas auxiliares e as de construcção são suppostas sem existencia real.

Antes de passarmos a estudar quaes são as posições distinctas que uma recta pode occupar no espaço em relação aos dois planos de projecção, é-nos necessario ensinar a resolver o problema seguinte, afim de poder differençar as partes visiveis e invisiveis de uma dada recta.

Problema I. Achar os traços de uma recta de que se conhecem as duas projecções. — Seja D a recta dada (fig. 2), cujas projecções conhecidas são $a\,b$ e $a'\,b'$. Como o *traço vertical* da recta é um ponto commum á recta e ao plano vertical, elle deve ter a sua projecção horizontal, ao mesmo tempo, sobre a projecção horizontal da recta e sobre a linha-de-terra; logo essa projecção horizontal estará no ponto a em que a projecção horizontal da recta incontra a linha-de-terra $L\,T$, e como consequencia, o traço vertical procurado estará na perpendicular $a\,a'$ á linha-de-terra; e como por outro lado elle ha-de estar na projecção vertical da recta, não pode deixar de estar no ponto a' em que esta projecção incontra a recta $a\,a'$.

Por conseguinte, para ter o traço vertical de uma recta dada pelas suas projecções, basta *prolongar a projecção horizontal até á linha-de-terra, e pelo ponto de incontro das duas ultimas linhas, levantar uma perpendicular á linha-de-terra, até que essa perpendicular vá incontrar a projecção vertical da recta dada, n'um ponto* a', *que é exactamente o traço vertical pedido.*

Como o traço horizontal da recta é um ponto commum á recta e ao plano horizontal, elle deve ter a sua projecção vertical ao mesmo tempo, sobre a projecção vertical da recta e sobre a linha-de-terra; logo a projecção vertical do traço horizontal da recta estará no ponto b' e o proprio traço horizontal estará n'um ponto qualquer da recta $b'\,b$ perpendicular á linha-de-terra; como por outro lado o traço horizontal deve estar sobre a projecção horizontal da recta, não pode deixar de incontrar-se no ponto b, em que a projecção horizontal $a\,b$ incontra a perpendicular $b\,b'$ á linha-de-terra. Por conseguinte podemos estabelecer a seguinte regra para determinar o traço horizontal de uma recta dada pelas suas duas projecções: *prolongue-se a projecção vertical da recta dada até incontrar a linha-de-terra, e pelo ponto de incontro levante-se uma perpendicular á mesma linha-de-terra; esta perpendicular prolongada incontrará a projecção horizontal da recta dada n'um ponto, que será o traço horizontal pedido da mesma recta.*

Reciprocamente, se fossem dados os dois traços a' e b de uma recta, sería facil concluir d'ahi as suas projecções. Com effeito, o ponto a' pertence á propria recta, logo a perpendicular $a'\,a$ á linha de-terra dará um ponto da projecção horizontal da recta, e como, por outro lado, a recta passa pelo seu traço horizontal b, não ha duvida que $a\,b$ é a projecção horizontal da recta; do mesmo modo, como o ponto b pertence á recta cujas projecções procuramos, é evidente que projectando b em b' sobre a linha-de terra, a projecção vertical da recta passará por b', e como tambem passa evidentemente pelo traço vertical a' da recta, não ha duvida que será $a'\, b'$ essa projecção vertical.

E' evidente que, sendo a recta parallela a um dos planos de projecção, não existe o traço correspondente a esse plano. Assim se vê na fig. 3 que, sendo a recta dada D parallela ao plano horizontal, tem só o traço vertical; sendo a recta dada D parallela ao plano vertical (fig. 4), só existe o seu traço horizontal b.

Se a recta fôsse ao mesmo tempo parallela ao plano horizontal e ao vertical, e portanto á sua intercessão ou linha-de-terra, nenhum dos traços existiria; é o que succede ás rectas D das fig. 5, 6 e 8. Aconselhamos o leitor a exercitar-se em procurar os traços de rectas dispostas de differentes modos em relação aos dois planos de projecção, como se vê nas fig. 2, 3 e 4, tendo sempre em attenção a regra estabelecida.

Passemos agora a estudar as differentes posições que uma recta pode tomar em relação aos dois planos de projecção.

Alphabeto da recta.— Uma recta no espaço pode apresentar um grande numero de posições distinctas em relação aos dois planos de projecção; e essas posições são expressas, ao mesmo tempo, pelas posições das duas projecções em relação á linha-de-terra, e pela maneira por que é feita a sua pontuação. Vejamos quaes são essas posições distinctas:

1.º *Pode a recta ser obliqua aos dois planos de projecção.*— N'este caso pode o segmento da recta, comprehendido entre os dois traços, estar no 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante, e teremos assim as quatro disposições differentes que se acham representadas na fig. 2. E' facil estabelecer a pontuação; para a recta que está no 1.º quadrante, e que é a primeira da fig. 2, é evidente, que no ponto (a, a') ella atravessa o plano vertical e no ponto (b, b') atravessa egualmente o plano horizontal; por conseguinte o segmento $(a\, b,\ a'\, b')$ é visivel, porque fica no 1.º quadrante, e por isso esse segmento é representado a traço cheio nas suas projecções; as outras partes indefinidas da recta, ficando uma atraz do plano vertical, e outra abaixo do plano horizontal, são invisiveis e por isso mesmo as suas projeções indefinidas são representadas a linha pontuada.

Do mesmo modo se percebe a pontuação que convem adoptar para as outras tres posições representadas na fig. 2. Vejamos agora como, pela simples pontuação, podemos conhecer qual é a projecção horizontal e qual é a vertical; considerando a quarta recta da fig. 2, nós vemos que ahi a parte da recta á esquerda do ponto (b, b') está representada a traço cheio, d'onde concluimos immediatamente que essa porção indefinida de recta está no 1.º quadrante, e portanto a projecção que está acima da linha-de-terra é a projecção vertical, e a que está abaixo é a horizontal, d'onde se conclue tambem, attendendo a regra indicada para achar os traços de uma recta, que o ponto b é o traço horizontal e o ponto a' o traço vertical; do mesmo modo se procederia para as tres primeiras rectas representadas na fig. 2, determinando-se sempre com facilidade a direcção da recta.

2.º *Pode a recta ser parallela ao plano horizontal;* a projecção horizontal da recta pode então ser qualquer, mas a projecção vertical tem que ser parallela á linha-de-terra, visto que todos os pontos da recta estão á mesma distancia do plano horizontal.

A recta pode n'este caso ter tres posições, visto que pode estar acima do plano horizontal, n'este plano, ou abaixo d'elle; estas tres posições estão representadas na fig. 3, onde a pontuação é bem facil de perceber, segundo o que temos dito até aqui.

3.º *Pode a recta ser parallela ao plano vertical de projecção;* a projecção vertical da recta pode então ser qualquer, mas a projecção horizontal tem que ser parallela á linha-de-terra, visto que todos os pontos da recta estão á mesma distancia do plano vertical. A recta pode n'este caso ter tres posições distinctas, visto que pode estar adeante do plano vertical, n'este plano, ou atraz d'elle; estas tres posições estão representadas na fig. 4, em que facilmente se comprehenderá a pontuação.

4.º *Pode a recta ser ao mesmo tempo parallela aos dois planos de projecção, e por conseguinte á linha-de-terra;* então ambas as projecções são parallelas á linha-de-terra, visto que a recta tem todos os seus pontos á mesma distancia do plano horizontal, distando tambem todos egualmente do plano vertical. N'este caso, a recta pode ter *nove* posições distinctas, a saber: *quatro* correspondentes aos quatro quadrantes; *quatro* quando ella se acha na parte anterior ou posterior do plano horizontal, ou na superior ou inferior do plano vertical; *uma* quando se acha confundida com a propria linha-de-terra. As quatro primeiras posições estão representadas na fig. 5, as quatro segundas posições na fig. 6, e a ultima na fig. 7. Podemos observar que estas *nove* posições são correspondentes ás *nove* posições do ponto, representadas na fig. 1 em (c, c'), (n, n'), (o, o'), (p, p'), (h, h'), (i, i'), (k, k'), (l, l'), (m, m'); e por isso, para representar estas nove posições da recta, basta n'aquella figura relativa ao ponto substituir os pontos por linhas rectas parallelas á linha-de-terra, tendo em attenção a pontuação.

Se ainda n'este caso, a recta estiver sobre o plano bissector do 1.º e 3.º quadrante, as suas projecções serão distinctas e egualmente distantes da linha-de-terra, visto que a recta dista então egualmente dos dois planos de projecção; se a recta estiver no plano bissector do 2.º e 4.º quadrante, então as suas duas projecções confundem-se n'uma só, situada acima da linha-de-terra, se a recta está no 2.º quadrante, ou abaixo, se a recta está no 4.º As duas ultimas posições particulares estão representadas na fig. 8.

5.º *Pode a recta ser perpendicular ao plano horizontal.*— N'este caso, a projecção horizontal da recta reduz-se a um ponto que é o seu traço horizontal, e a projecção vertical reduz-se a uma recta perpendicular á linha-de-terra, pois sendo a projecção vertical a intercessão do plano projectante verticalmente da recta e do plano vertical, e sendo n'este caso estes dois planos perpendiculares ao plano horizontal, é evidente que aquella intercessão é perpendicular ao plano horizontal, e por conseguinte á linha-de-terra que existe n'este plano. Pode n'este caso a recta ter *tres* posições distinctas, conforme está adeante do plano vertical, n'este plano, ou atraz d'elle. Estas tres posições estão representadas na fig. 9.

6.º *Pode a recta ser perpendicular ao plano vertical.*— N'este caso é a projecção vertical da recta que se reduz a um ponto emtanto que a projecção horizontal é perpendicular á linha de terra. Pode, n'este caso, a recta ter *tres* posições conforme está acima do plano horizontal, n'este plano, ou abaixo; estas tres posições estão representadas na fig. 10.

7.º *Pode a recta ser perpendicular á linha-de-terra*; n'este caso, as duas projecções confundem se em uma unica linha perpendicular á linha-de-terra, pois é evidente que n'este caso os dois planos projectantes se confundem n'um unico plano, que, passando pela recta e sendo vertical, é perpendicular a linha-de-terra e portanto intercepta os dois planos de projecção, segundo rectas perpendiculares á linha-de-terra, e que se incontram no mesmo ponto d'ella, as quaes por conseguinte se confundem n'uma unica recta, quando se rebater o plano vertical sobre o horizontal.

N'este caso excepcional, já não são sufficientes as duas projecções da recta, para determinarem a sua posição no espaço; e, para que a recta seja completamente determinada, é preciso que sejam dadas as projecções de dois dos seus pontos. N'este caso pode a recta ter *quatro* posições distinctas, conforme a parte d'ella comprehendida entre os traços está no 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante; estas quatro posições acham-se representadas na fig. 11.

8.º *Pode a recta incontrar a linha-de-terra;* n'este caso, ambos os traços da recta estão no ponto em que ella incontra a linha-de-terra; e pode succeder que as duas projecções da recta façam angulos agudos com a mesma porção da linha-de-terra, estando uma das projecções acima e outra abaixo da mesma linha, o que succederá quando a recta atravessar o 1.º e 3.º quadrante; se as projecções formam angulos agudos com as duas partes da linha de terra, a recta atravessa o 2.º e 4.º quadrante; estas *duas* posições estão representadas nas fig. 12 e 13; se na primeira d'estas posições os angulos agudos são eguaes, a recta está no plano bissector do 1.º e 3.º quadrante; se, na segunda d'estas posições, as projecções se confundem n'uma só recta, é porque a recta no espaço atravessa o 2.º e 4.º quadrante, e existe no plano bissector d'estes dois diedros; este caso particular está representado na fig. 14.

9.º *Pode a recta incontrar a linha-de-terra e ser-lhe perpendicular;* n'este caso, é bem evidente que as duas projecções da recta se confundem em uma unica recta perpendicular á linha-de-terra, visto que os dois planos projectantes se confundem, n'este caso particular, em um unico plano que, sendo ao mesmo tempo perpendicular aos dois planos de projecção, é perpendicular á sua intercessão, isto é, á linha-de-terra; para que, n'este caso, a recta no espaço, fique determinada, é indispensavel que se conheçam as duas projecções de um dos seus pontos, differente d'aquelle em que ella incontra a linha-de-terra; este caso acha-se representado na fig. 15.

Do que temos dito, conclue-se que duas rectas quaesquer obliquas á linha-de-terra podem sempre su[illegible]ôr-se projecções de uma recta no espaço, a qual sería a i[illegible]tercessão de dois planos, passando pelas rectas dadas, e respectivamente perpendiculares aos planos de projecção. Quando as duas projecções são confundidas n'uma unica recta perpendicular á linha-de-terra, segue-se, segundo o que dissémos, que a recta no espaço é indeterminada.

Quando uma das projecções é perpendicular á linha-de-terra, a outra reduz se a um ponto.

Quando ambas as projecções são perpendiculares á linha-de-terra, devem incontrar esta n'um unico ponto.

Duas rectas situadas no espaço podem estar ou não no mesmo plano; no primeiro caso podem incontrar-se ou ser parallelas. Se as rectas se incontram, as suas projecções incontram-se egualmente, e o ponto de incontro das projecções horizontaes deve estar na mesma perpendicular á linha-de-terra com o ponto de incontro das projecções verticaes.

Reciprocamente se as projecções horizontaes e as verticaes se cortam respectivamente em dois pontos, situados na mesma perpendicular á linha-de-terra, isso indica-nos que as duas rectas se cortam no espaço e estão portanto no mesmo plano.

Se duas rectas são parallelas, as suas projecções são respectivamente parallelas, visto serem parallelos os planos projectantes correspondentes. Reciprocamente, quando as projecções do mesmo nome são parallelas, as rectas são parallelas no espaço, porque, sendo então os planos projectantes parallelos dois a dois, o mesmo succede ás suas intercessões que são, como se sabe, as rectas no espaço. Se duas rectas não se incontram no espaço, o ponto de incontro das projecções horizontaes não está com o ponto de incontro das projecções verticaes na mesma perpendicular á linha-de-terra.

Reciprocamente, quando as projecções de duas rectas se cortam respectivamente em pontos não situados na mesma perpendicular á linha-de-terra, as rectas não se incontram no espaço.

Quando duas rectas são perpendiculares á linha-de-terra, as duas projecções de cada uma d'ellas são perpendiculares áquella linha e confundem-se n'uma só recta; d'onde se segue que, mesmo que as rectas no espaço não sejam parallelas, sempre as suas projecções o são; portanto, n'este caso, para assegurar o parallelismo das rectas no espaço, é preciso recorrer a outro meio.

Para melhor comprehender o que vamos expôr, julgamos muito conveniente fazer acompanhar a figura que representa as projecções das duas rectas, por outra figura em que estas são representadas em projecção sobre um plano perpendicular á linha-de-terra.

As lettras correspondem-se nas duas figuras, de modo que facil é comprehendêl-as. Sejam AB e CD (fig. 42), as duas rectas que além de serem perpendiculares á linha-de-terra são parallelas entre si; tomemos sobre a primeira dois pontos A e B projectados em (a, a') e (b, b') e sobre a segunda dois pontos C e D projectados em (c, c') e (d, d'); tiremos as horizontaes dos pontos B e D e as verticaes dos pontos A e C; formam-se assim os dois triangulos rectangulos $A\,o\,B$ e $C\,o'\,D$ que dão: $B\,o : A\,o :: D\,o' : C\,o'$ ou $a\,b : a'\,b' :: c\,d : c'\,d'$

que é uma condição necessaria para que as rectas sejam parallelas. E reciprocamente, se aquella relação tiver logar para duas rectas cujas projecções sejam perpendiculres á linha-de-terra, essas duas rectas serão parallelas; pois, construindo os dois triangulos rectangulos de que falámos, elles serão similhantes por terem cada um, um angulo recto e os lados adjacentes proporcionaes; como os cathetos d'esses triangulos rectangulos são respectivamente parallelos, o mesmo succederá ás hypotenusas que são segmentos das duas rectas no espaço.

Representação das linhas curvas.—E' conveniente saber como, em Geometria Descriptiva, se representam as linhas curvas.

Imaginemos uma curva no espaço; se de todos os seus pontos, imaginarmos perpendiculares ao plano horizontal, os pés d'essas perpendiculares, n'este plano, unidas por uma linha continua, darão em geral uma linha curva, que é a projecção horizontal da curva no espaço.

E' evidente que as perpendiculares de que falamos formam uma superficie cylindrica ou o *cylindro projectante horizontalmente da curva;* e como se vê, a projecção horizontal da curva não é mais que a intercessão d'este cylindro com o plano horizontal de projecção.

Do mesmo modo tirando pelos differentes pontos da curva, no espaço, perpendiculares ao plano vertical, fórma-se o *cylindro projectante verticalmente da curva,* cuja intercessão com o plano vertical de projecção constitue a projecção vertical da curva considerada. A curva no espaço pode pois considerar-se como a intercessão dos dois cylindros projectantes; e bastam as duas projecções de uma curva para que ella fique determinada, visto que as duas projecções determinam os dois cylindros de que a curva é intercessão.

E' muito facil achar os *traços* de uma curva dada pelas suas duas projecções, isto é, achar os pontos em que a curva no espaço atravessa os planos de projecção. Pois, em vista de razões perfeitamente identicas áquellas que nos serviram para determinar os traços de uma recta, basta para ter os traços verticaes de uma curva procurar os pontos em que a projecção horizontal corta a linha-de-terra e por esses pontos levantar a esta linha perpendiculares que irão cortar a projecção vertical da curva em pontos que serão os traços pedidos. Identicamente, para ter os traços horizontaes, levantaremos perpendiculares á linha-de-terra pelos pontos em que ella é incontrada pela projecção vertical da curva e estas perpendiculares incontrarão a projecção horizontal da mesma curva nos pontos pedidos.

Notaremos comtudo que, por este meio, acharemos muitas vezes pontos que realmente não serão traços da curva; mas em geral, não será difficil distinguir d'entre os pontos achados, pela construcção indicada, quaes são realmente traços da curva dada.

Representação do plano.— Um plano pode ser definido por tres pontos, por duas rectas que se cortem, por duas rectas parallelas, por uma recta e um ponto; mas, em Geometria Descriptiva, escolhe-se em geral para determinar um plano duas rectas particulares que são aquellas segundo as quaes o plano corta os dois planos de projecção e que se chamam *traços do plano*, e é claro que os dois traços (o vertical e o horizontal de um plano) cortam a linha de-terra n'um unico ponto que é o ponto em que aquella recta incontra o plano. E' muito simples o systema de fazer a designação de um plano por uma lettra maiuscula, por exemplo, P ou Q, designando o traço horizontal do plano pela lettra H com o expoente P ou Q e o traço vertical pela lettra V com o expoente P ou Q; será assim que designaremos em geral os planos representados nas nossas figuras.

Alphabeto do plano.— Vejamos quaes são as posições distinctas que um plano pode occupar, em relação aos planos de projecção.

1.º *Pode o plano ser obliquo aos dois planos de projecção* e n'este caso ha a distinguir *duas* posições, segundo os traços fazem angulos agudos com a mesma parte ou com partes differentes da linha-de-terra (fig. 16).

2.º Em qualquer d'estes dois casos, pode succeder que os dois traços façam angulos eguaes com a linha-de-terra; e n'este caso se os angulos são feitos com partes differentes da linha-de terra, os dois traços confundem-se como se vê na fig. 17

3.º Pode o plano ser perpendicular ao plano horizontal; n'este caso o seu traço vertical sendo a intercessão de dois planos perpendiculares ao plano horizontal, é uma linha perpendicular a este plano, e portanto á linha-de-terra (fig. 18).

4.º Pode o plano P ser perpendicular ao plano vertical; n'este caso vê-se como no caso antecedente que o traço horizontal do plano será perpendicular á linha-de-terra (fig. 19).

5.º Pode o plano P ser perpendicular á linha de-terra; os seus traços serão ambos perpendiculares áquella linha, e depois de rebatimento do plano vertical sobre o horizontal confundir-se-hão n'uma só linha perpendicular á linha-de-terra (fig. 20).

6.º Pode o plano P ser parallelo ao plano vertical; n'este caso, o seu traço vertical não existe, ou, o que é o mesmo, está situado a uma distancia infinita; o seu traço horizontal é então parallelo á linha-de-terra.

O plano pode n'este caso ter duas posições, conforme está adeante ou atraz do plano vertical (fig. 21).

7.º Pode o plano ser parallelo ao plano horizontal; então o seu traço horizontal não existe, ou antes, está situado no infinito; o seu traço vertical é parallelo á linha-de-terra; o plano pode ter duas posições conforme está acima ou abaixo do plano horizontal (fig. 22).

8.º Pode o plano ser parallelo á linha-de-terra; n'este caso os seus traços são parallelos á linha-de-terra; pois, se assim não fôsse, esta incontraria o plano, o que é contrario á hypothese. O plano pode ter quatro posições bem distinctas, conforme a porção, comprehendida entre os dois traços, está no primeiro, segundo, terceiro, ou quarto quadrante (fig. 24).

9.º Pode na ultima hypothese, o plano ter egual inclinação sobre os dois planos de projecção; n'este caso, se a porção comprehendida entre os traços está no primeiro ou terceiro quadrante, os dois traços ficam a egual distancia da linha-de-terra e de um lado e outro d'ella; se a porção do plano comprehendida entre os traços está no segundo ou quarto quadrante, os dois traços confundem-se n'um só, acima ou abaixo da linha-de terra (fig. 25).

10.º Pode o plano passar pela linha-de-terra; n'este caso, os seus dois traços confundem-se n'aquella linha e não são sufficientes para determinar o plano.

Para que elle fique completamente determinado, é necessario que se conheçam as projecções de um dos seus pontos que será designado pela lettra minuscula correspondente á lettra maiuscula com que se designa o plano. Este plano pode ter duas posições, conforme atravessa o primeiro e terceiro quadrantes ou o segundo e quarto (fig. 23).

11.º Pode o plano ser um dos proprios planos de projecção; n'este caso ainda passa pela linha-de-terra, e o ponto dado para definir a posição do plano tem sua projecção sobre a linha-de-terra.

Vemos pois que uma recta e um ponto sempre são sufficientes para determinar um plano, emtanto que os seus dois traços nem sempre bastam para definir a sua posição no espaço.

Em resumo, podemos concluir que uma recta no espaço pode occupar *quarenta e tres* posições em relação aos dois planos de projecção. Com effeito vimos que no 1.º caso, ella podia ter 4 posições; no 2.º, podia ter 3; no 3.º, tambem 3; no 4.º, pode, como se viu, apresentar 13 posições contando aquellas em que está n'um dos planos bissectores; no 5.º, pode ter 3 posições; no 6.º caso, tambem pode apresentar 3 posições; no 7.º caso, a recta pode ter 8 posições se contarmos as 4 correspondentes aos casos em que é perpendicular aos planos bissectores; no 8.º, pode apresentar 4 posições; e no 9.º, pode apresentar 2. Ao todo, 43 posições distinctas.

Um plano pode no espaço occupar *vinte e tres* posições distinctas, em relação aos planos de projecção; com effeito, no 1.º caso, pode occupar 2 posições; no 2.º caso pode ter tambem 2; no 3.º caso, pode ter 1 posição; no 4.º, tambem 1; no 5.º, tambem 1; no 6.º, pode ter 2; no 7.º, tambem 2; no 8.º, pode ter 4; no 9.º, tambem 4; no 10.º, pode apresentar 2 posições; e no 11.º, tambem 2. Ao todo, 23 posições distinctas.

Postas estas noções, nenhuma difficuldade poderemos achar em representar, por meio das suas projecções ou dos seus traços, um ponto, uma recta ou um plano cujas posições no espaço nos sejam conhecidas; e reciprocamente, do conhecimento das projecções de um ponto ou de uma recta, ou dos traços de um plano, facilmente concluiremos qual a posição que o ponto, a recta, ou o plano, apresentam no espaço.

Passemos agora a resolver os problemas mais applicados na Geometria Descriptiva.

CAPIPULO II

PROBLEMAS RELATIVOS AO PONTO Á RECTA E AO PLANO

Problema I. — *Dadas as projecções de dois pontos, achar as projecções da recta que os une; em seguida achar a verdadeira grandeza da porção de recta comprehendida entre os dois pontos, isto é, achar a distancia entre os dois pontos dados pelas suas duas projecções.* Como já se disse, as projecções de uma linha recta são tambem rectas, de modo que basta ter as projecções de dois pontos de uma recta no espaço, para conhecer immediatamente as proprias projecções da recta; não temos pois mais, para resolver a primeira parte do problema, que unir as projecções horizontaes *a* e *m* (fig. 26) dos dois pontos dados para ter a projecção horizontal *a m* da recta que os une no espaço; unindo as projecções verticaes a' e m' temos a projecção vertical da recta; de modo que a recta ($a\ m$, $a'\ m'$) é a recta pedida; podemos construir agora o seu traço horizontal (b, b') como dissémos no problema I do capitulo I.

Resta-nos agora resolver a segunda parte do problema; podemos notar que a distancia, entre os dois pontos dados, é realmente medida, no espaço, pela porção de recta que tem para projecções *a m* e $a'\ m'$; mas é preciso, do conhecimento d'estas projecções, concluir qual é a verdadeira grandeza d'esta porção *A M* de recta no espaço. Ora, desde já, podemos concluir que, em geral, a projecção de uma recta finita sobre um plano é menor que a propria recta no espaço; mas *quando uma recta finita se projecta sobre um plano que lhe é parallelo, a projecção tem o mesmo comprimento que a recta no espaço.* Posto isto, imaginemos que a recta no espaço gira em-torno da vertical projectante do ponto *A* do espaço; a recta ($a\ m$, $a'\ m'$) descreverá um cóne da revolução, em torno d'aquella vertical, visto que suppomos que o angulo da recta *A M* no espaço com o eixo de rotação não varía; o ponto *M*, do espaço conservar-se-ha sempre á mesma altura e descreverá um arco de circulo horizontal. Imaginemos que se continua a rotação da recta, até que ella seja parallela ao plano vertical, o que succederá quando a sua projecção horizontal se tiver tornado parallela á linha-de-terra; a rotação cessa pois, quando a projecção horizontal da recta chegar a *a p*, tendo o ponto *m* chegado a *p*, depois de ter caminhado sobre o arco de circulo *m p* com centro em *a* e raio *a m*, arco de circulo que é a projecção horizontal do caminho que o ponto *M* descreve no espaço, e cuja projecção vertical é a horizontal $m'\ p'$ conduzida pelo ponto m'. A projecção vertical do ponto extremo da recta que se projecta em *p* horizontalmente, devendo estar na perpendicular conduzida por *p* á linha-de-terra e na horizontal $m'\ p'$, estará no ponto p'; como durante a rotação o ponto a' se não deslocou, a recta terá tomado a posição ($a\ p$, $a'\ p'$), e como, na sua nova posição, ella é parallela ao plano vertical, projecta-se n'este plano em verdadeira grandeza, segundo o que foi dito; por conseguinte a recta $a'\ p'$ mede a verdadeira distancia procurada entre os pontos dados. Podemos pois estabelecer a seguinte regra, que frequentemente será empregada na resolução de outros problemas: *para ter a verdadeira distancia entre dois pontos* (a, a′) *e* (m, m′), *basta formar um triangulo rectangulo* a′ b′ p′ *que tenha um dos cathetos* a′ b′ *egual á differença das alturas dos dois pontos dados, acima do plano horizontal, e o outro catheto egual á projecção horizontal* a m *da recta que une os dois pontos; a hypotenusa* a′ p′ *d'este triangulo é a verdadeira distancia pedida.*— Podemos resolver o problema, fazendo girar a recta no espaço em-torno da horizontal projectada em *a′* e que é projectante verticalmente do ponto *A* do espaço; suppondo que a rotação se faz sem alterar o angulo da recta *A M* com o eixo de rotação, e que esta só termina quando a recta se tem tornado parallela ao plano horizontal e por conseguinte a sua projecção vertical tomado a posição *a′ q′* parallela á linha-de-terra, tendo o ponto *M* do espaço descripto um arco de circulo que se projecta horizontalmente em *m q* e verticalmente no arco *m′ q′* e tendo o ponto *A* do espaço ficado immovel, é evidente que depois da rotação, a recta terá as projecções (*a q*, *a′ q′*); e, como ella é agora parallela ao plano horizontal, será *a q* a sua verdadeira grandeza (isto é, a verdadeira distancia pedida entre os dois pontos dados). D'onde se conclue a seguinte regra: *para ter a verdadeira distancia entre dois pontos* (a, a′) *e* (m, m′) *basta formar um triangulo rectangulo* d a q *que tenha um dos cathetos* a d *egual á differença das distancias dos dois pontos dados ao plano vertical e o outro catheto* q d *egual á projecção vertical* a′ m′ *da recta que une os dois pontos; a hypotenusa* a q *d'esse triangulo é a verdadeira distancia pedida.*

Em vez de termos tomado para eixos de rotação as projectantes do ponto *A* poderiamos ter tomado as do ponto *M*; o resultado sería o mesmo e sempre seriam applicaveis as regras precedentes.

Ainda se pode resolver de um modo muito simples este mesmo problema. Basta *rebater* a recta (*a m*, *a′ m′*) sobre o plano horizontal, fazendo girar em-torno da recta *a m*, como charneira, o trapezio invariavel formado pela recta *A M* no espaço e pelas verticaes que projectam horizontalmente em *a* e *m* os pontos *A* e *M* do espaço; depois do rebatimento, aquellas verticaes ficam perpendiculares á charneira *a m* e tomarão as posições *m M* e *a A* sendo as rectas *m M* e *a A* eguaes ás alturas dos pontos *m′* e *a′* a respeito da linha-de-terra; a recta do espaço será rebatida em *A M*, e será *A M* a sua verdadeira grandeza, isto é, a verdadeira distancia pedida entre os dois pontos dados (*a*, *a′*) e (*m*, *m′*).

Podemos observar que n'esta construcção convem aproveitar uma verificação, que consiste em que a recta $A\,M$ prolongada deve incontrar a charneira $a\,m$ no ponto b, traço horizontal da recta (a, m) $(a'\,m')$ visto que este ultimo ponto fica immovel durante o rebatimento. — Ainda devemos notar que fica resolvido o problema de *achar os angulos que uma recta faz com os planos de projecção*; não ha duvida que o angulo $a'\,p'\,m$ é o angulo que a recta $(a\,p,\ a'\,p')$ faz com o plano horizontal, visto que o angulo de uma recta com um plano é o angulo que a recta faz com a sua projecção n'esse plano, e attendendo tambem a que, quando os dois lados de um angulo são parallellos a um plano, o angulo projecta-se em verdadeira grandeza n'esse plano; ora se notarmos que durante a rotação da recta $(a\,m,\ a'\,m')$ o angulo que ella faz com o plano horizontal não muda, podemos effectivamensè concluir que o angulo $a'\,p'\,m'$ é egual ao angulo que a recta dada $(a\,m,\ a'\,m')$ fórma com o plano horizontal; do mesmo modo se conclue que o angulo $a\,q\,d$ é egual ao angulo que a recta dada fórma com o plano vertical. Resolvendo o problema pelo processo do rebatimento, é evidentemente o angulo $A\,b\,a$ egual ao angulo que a recta fórma com o plano horizontal; se tivessemos feito o rebatimento da recta sobre o plano vertical, fazendo-a girar em torno de $a'\,m'$, como charneira, achariamos facilmente o angulo da recta $(a\,m,\ a'\,m')$ com o plano vertical. Mais adeante, em outro problema, estudaremos mais desinvolvidamente esta questão relativa aos angulos de uma recta com os planos de projecção, e que só incidentemente agora nos nos occupou.

Problema II. — *Dada uma recta indefinida* (a b, a' b') (*fig 26*), *e um dos seus pontos* (a, a') *pede-se para achar um outro ponto* (m, m') *d'esta recta, que esteja distante do primeiro uma dada quantidade* δ. — Este problema é reciproco do precedente; a maneira mais simples de o resolver consiste em rebater a recta dada sobre um dos planos horizontaes, fazendo a girar em torno de $a\,b$ como charneira; notando que o ponto b, traço horizontal da recta, não se desloca durante o rebatimento, e que o ponto a toma sobre a perpendicular $a\,A$ á charneira a posição A, como vimos, acharemos facilmente a recta rebatida $A\,b$; sobre ella, e a partir de A, tomemos o segmento $A\,M = \delta$ e imaginemos que se desfaz o rebatimento; o ponto A volta para a, o ponto M move-se sobre a perpendicular $M\,m$ á charneira, e vae para m, quando o rebatimento estiver desfeito; o ponto m é pois a projecção horizontal do ponto pedido da recta, e que dista de $(a,\ a')$ a quantidade δ; para acabar de resolver o problema, basta achar a projecção vertical de M; ora é facil de vêr que ella será m', visto que deve estar ao mesmo tempo na projecção vertical $a' m'$ da recta e na perpendicular á linha-de-terra tirada por m.

De um modo perfeitamente identico, se resolvia o problema fazendo o rebatimento da recta sobre o plano vertical, fazendo a girar em-torno de $a' m'$ como charneira.

Ainda se resolve sem rebater a recta e dando-lhe apenas uma rotação em-torno de uma das projectantes do ponto dado (a, a'), até tornar a recta parallela a um dos planos de projecção, como se fez no problema precedente; assim imaginemos que se toma para eixo de rotação a vertical projectada em a; quando a recta se mover até se tornar parallela ao plano vertical, o ponto (a, a') não se deslocará, e o ponto (b, b'), traço horizontal da recta, descreverá no plano horizontal o arco de circulo $b\,g$ com centro em a e raio $a\,b$; a projecção horizontal da recta, depois da rotação, será a recta $a\,g$ parallela á linha-de-terra; e, como o arco $b\,g$ se projecta sobre a linha de-terra, a projecção vertical do traço b depois da rotação estará em g' e a recta terá para projecção vertical $a' g'$; tomando agora sobre $a' g'$ um comprimento $a' p' = \delta$, projectando p' em p e notando que depois de desfazer a rotação, levando a recta á primitiva posição $(a\,b, a'\,b')$, o ponto p encaminha para m, sobre o arco $p\,m$ descripto de a como centro, notaremos que este ponto m é a projecção horizontal do ponto procurado; é evidente que a projecção vertical do mesmo ponto, devendo estar sobre a projecção vertical $a' b'$ da recta, e sobre a perpendicular $m\,m'$ á linha-de-terra, tirada por m, estará em m'; logo é effectivamente $(m\ m')$ o ponto pedido que dista de (a, a') a quantidade dada δ.

Problema III.— *Por um ponto dado conduzir uma recta que seja parallela a uma recta conhecida.*— E' evidente que quando duas rectas são parallelas, o mesmo succede a seus planos projectantes, e por conseguinte ás intercessões d'estes com o plano de projecção e que são as projecções das rectas sobre esse plano; portanto vêmos que, quando duas rectas são parallelas, as suas projecções do mesmo nome são egualmente parallelas.

Reciprocamente: quando duas rectas teem as projecções do mesmo nome respectivamente parallelas, as proprias rectas no espaço são parallelas entre si.

Com effeito se as projecções horizontaes são parallelas e succede o mesmo ás projecções verticaes. os quatro planos projectantes são respectivamente parallelos dois a dois; e por conseguinte tambem serão parallelas as suas intercessões mutuas, isto é as rectas no espaço. Posto isto, nada é mais simples que resolver o problema de que tratamos; como é dada uma recta, intende-se que se conhecem as suas duas projecções; e, como tambem é dado um ponto por onde deve passar a recta procurada, parallelamente á recta dada, segue-se que tambem são conhecidas as duas projecções d'esse ponto; por conseguinte não temos mais que pela projecção horizontal do ponto conduzir uma recta parallela á projecção horizontal da recta dada, e, pela projecção vertical do ponto, conduzir uma recta parallela á projecção vertical da recta dada, para o problema ficar completamente resolvido; em seguida poderemos, como foi dito, achar os traços da nova recta.

Problema IV. *Construir um plano passando por tres pontos dados* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *(fig. 28).* — Já se disse que, em geral, para determinar graphicamente a posição de um plano no espaço, basta determinar as suas intercessões com os planos de projecção; isto é, basta assignar os seus *dois traços.* Tambem se disse já que estes dois traços incontravam a linha-de-terra no mesmo ponto, que é aquelle em que ella atravessa o plano; é comtudo bem evidente que o angulo que os dois traços formam entre si, depois do rebatimento do plano vertical de projecção sobre o plano horizontal, não é egual ao que os dois traços formam no espaço. — Tambem é evidente que, quando uma recta existe n'um plano, os traços da recta existem respectivamente nos dois traços do plano. Posto isto unam-se dois a dois por meio de rectas ($a\ b$, $a'\ b'$) ($b\ c$, $b'\ c'$) ($a\ c$, $a'\ c'$) os pontos dados (fig. 28); cada uma d'estas rectas existe no plano procurado, visto que, quando uma recta tem dois pontos n'um plano, existe toda n'esse plano; construam-se como foi dito no problema I do capit. I, os traços verticaes e', f', g' d'estas rectas. Estes tres pontos pertencerão, segundo o que dissémos, ao traço vertical do plano, e são mais que sufficientes para determinar esse traço; elles deverão todos tres estar na mesma recta $e'\ f'\ g'$, que será o *traço vertical* do plano pedido.

Procurando os traços horizontaes d, h e k, das tres rectas ($a\ b$, $a'\ b'$), ($b\ c$, $b'\ c'$), ($a\ c$, $a'\ c'$), elles deverão estar todos tres na mesma recta $d\ h\ k$, que é o traço horizontal do plano pedido. Devemos, porêm, observar que n'esta construcção, alêm da verificação de estarem em linha recta os traços verticaes das tres rectas, e succeder o mesmo aos traços horizontaes, ha outra verificação que consiste em que os dois traços do plano devem incontrar-se no mesmo ponto da linha-de-terra.

Querendo dispensar as verificações, o problema resolve-se muito mais simplesmente. Basta unir os pontos (a, a') e (b, b') e depois os pontos (a, a') e (c, c'); procurar e unir os traços do mesmo nome, por exemplo, os horizontaes, das rectas $(ab, a'b')$ $(ac, a'c')$ assim obtidas; e teremos o traço horizontal dk do plano pedido; depois é sufficiente procurar só o traço vertical de uma das rectas, por exemplo, $(a, b, a' b')$, e unir este traço e' com o ponto em que o traço horizontal do plano incontra a linha-de-terra, para ter o traço $e' g'$ do plano pedido.

Problema V. *Construir um plano passando por um ponto e uma recta dados.* Sobre a recta tome-se um ponto qualquer, e una-se esse ponto com o ponto dado; teremos uma segunda recta que existe no plano; achando os traços horizontaes e os verticaes das duas rectas, teremos dois pontos para determinar cada um dos traços do plano pedido; para verificação os dois traços deverão incontrar-se no mesmo ponto da linha-de-terra. Poderiamos tornar mais simples a construcção dispensando a ultima verificação; bastará então achar os dois traços do mesmo nome, por exemplo horizontaes, das duas rectas, e unindo-os teremos o traço horizontal do plano; achando o traço vertical de uma das rectas e unindo-o com o ponto onde o traço horizontal do plano incontra a linha-de-terra, teremos o traço vertical do plano pedido. O leitor deve exercitar-se em executar estas construcções, apezar de bastante simples; na fig. 28 podemos imaginar que a recta $(a\, b, a'\, b')$ é a recta dada e que (c, c') é o ponto dado; tomando o ponto $(a\, a')$ arbitrario sobre a recta dada e unindo-o com o ponto dado (c, c'); achando os traços horizontaes d e k e os verticaes e' e g' das duas rectas, teremos, unindo-os respectivamente, os traços dk e $e'\, g'$ do plano pedido.

Podemos resolver este problema de outro modo; pelo ponto dado conduza se uma recta parallela á recta dada; é sabido que duas rectas parallelas estão sempre no mesmo plano; por conseguinte a recta dada e a sua parallela determinam effectivamente um plano, o qual passa pelo ponto dado e satisfaz por conseguinte ao problema; para achar os dois traços do plano, basta achar os traços das suas rectas, e unir, dois a dois, os traços do mesmo nome.

Problema VI. *Fazer passar um plano por duas rectas concorrentes.* Para resolver o problema, não temos mais que achar as traços tanto horizontaes como verticaes das duas rectas dadas, e unir, dois a dois, os traços do mesmo nome para ter os traços do plano pedido. Assim se na fig. 28 imaginarmos que $(a\,b, a'\,b')$ e $(a\,c, a'\,c')$ são as duas rectas concurrentes dadas (que deveriam ser traçadas a traço cheio, se a figura fôsse feita para este caso), não teriamos mais que achar os seus traços horizontaes, por exemplo, d e k, e unil-os, para ter o traço horizontal $d\,k$ do plano pedido; em seguida bastava achar o traço vertical de uma das rectas, por exemplo, o traço e' e unil-o com o ponto em que o traço horizontal do plano incontra a linha-de-terra, para ter o traço vertical do plano pedido. E' claro que quando o traço horizontal do plano pedido fôsse incontrar a linha-de-terra fóra dos limites do desenho, não nos poderiamos poupar ao trabalho de achar os dois traços verticaes e' e g' e unil-os, para ter o traço vertical $e'\,g'$ do plano procurado. Tambem será conveniente procurar todos os quatro traços das duas rectas e obter, independentemente um do outro, os dois traços do plano pedido, quando se quizer ter a verificação que consiste em ambos os traços do plano incontrarem a linha-de-terra no mesmo ponto.

Devemos notar que para que duas rectas concorram n'um ponto A do espaço, é necessario que as duas projecções horizontaes $a\,c$ e $a\,b$, e as duas projecções verticaes $a'\,c$ e $a'\,b'$, se incontrem em pontos a e a' que estejam na mesma perpendicular $a\,a'$ á linha-de-terra, pois só assim haverá realmente, no espaço, um ponto cujas projecções sejam a e a'.

Problema VII. *Construir um plano que passe por uma recta dada e seja parallelo a outra recta tambem dada.* Sabe-se que, para que um plano seja parallelo a uma recta, é sufficiente que n'elle exista uma recta parallela á recta dada. Posto isto, para resolver o nosso problema procederemos da seguinte maneira: Por um ponto qualquer da recta dada a que chamaremos D e por onde o plano procurado deve passar, conduza-se uma recta D'' parallela á outra recta tambem dada D'; estas duas rectas D e D'' estão n'um mesmo plano que, contendo uma recta D'' parallela a uma das rectas dadas D', é elle mesmo parallelo a esta recta, e satisfaz por conseguinte ao problema, visto que passa além d'isso pela outra recta dada D. Para ter os traços d'este plano, basta achar os quatro traços das duas rectas D e D'' e unir, dois a dois, os traços do mesmo nome; os dois traços do plano devem, como verificação, incontrar a linha-de-terra n'um unico ponto.

Problema VIII *Construir um plano que passe por um ponto dado e seja parallelo a um plano determinado por duas rectas parallelas ou concorrentes.* 1.º Se o plano é dado por duas rectas parallelas, podemos proceder do modo seguinte: procuramos os traços d'essas duas rectas, e, unindo-os dois a dois, teremos os traços do plano dado; se agora pelo ponto dado, tirarmos uma recta parallela ás rectas dadas, é claro que essa recta deverá pertencer ao plano pedido.

Por conseguinte, este plano terá os seus traços, passando pelos traços d'essa recta; mas, por outro lado, quando dois planos são parallelos, as suas intercessões com qualquer plano são parallelas entre si; portanto os traços do mesmo nome dos planos parallelos são respectivamente parallelos; para resolver pois o problema, não haverá mais que, depois de ter tirado pelo ponto dado uma recta parallela ás rectas dadas, determinar os seus dois traços e por esses pontos tirar rectas respectivamente parallelas aos traços do plano dado; essas rectas serão os traços do plano procurado.

2.º Se o plano dado é determinado por duas rectas concorrentes o problema ainda é mais simples de resolver: pelo ponto dado tiram-se rectas respectivamente parallelas ás duas rectas dadas, e, procurando os traços d'aquellas duas rectas, bastará unil-os respectivamente, dois a dois, para ter immediatamente os traços do plano pedido, que se devem incontrar no mesmo ponto da linha-de-terra. Para verificação podemos procurar os traços das duas rectas dadas e unil-os, dois a dois, para ter os traços do plano dado, que deverão ser respectivamente parallelos aos traços já achados do plano procurado.

Problema IX. *Achar os traços de uma recta dada, no caso das duas projecções da recta estarem n'uma mesma perpendicular á linha-de-terra.* No capitulo I já ensinámos a achar, em geral, os traços de uma recta dada pelas suas duas projecções. Agora vamos tratar do caso particular em que a recta é perpendicular á linha-de-terra e não a incontra.

Em primeiro logar, recordaremos que, no caso especial que nos occupa, as duas projecções da recta não bastam para definir a sua posição no espaço, e, como dissémos, é necessario, para esse effeito, conhecer as projecções de dois pontos da recta.

Sejam pois (fig. 29) mn e $m'n'$ as duas projecções da recta e (m, m') (n, n') as projecções de dois dos seus pontos.

Imagine-se um plano conduzido pela recta perpendicularmente á linha-de-terra, isto é, um plano de *perfil* que é, ao mesmo tempo, plano projectante da recta sobre os dois planos de projecção.

Rebata-se este plano de perfil sobre o plano horizontal de projecção, fazendo-o girar em torno do seu traço horizontal

$m n$, como charneira; n'este movimento de rotação, é arrastado o trapezio invariavel formado pela recta, pelas duas verticaes projectadas em m e n e pelo traço $m n$ do plano de perfil; ora como aquellas verticaes ficam, depois do rebatimento, perpendiculares á charneira, é claro que tomarão as posições $m M$ e $n N$; e, se tomarmos $m M$ e $n N$ respectivamente eguaes ás alturas dos pontos m' e n' a respeito da linha-de-terra, é claro que a recta $M N$ é a recta rebatida.

Para ter esta recta, basta pois descrever os arcos indicados na figura e tirar pelos pontos em que elles incontram a linha-de-terra rectas parallelas a $n b$, até incontrar as rectas $m M$ e $n N$ parallelas á linha-de-terra. Como o ponto b, em que a recta $M N$ incontra $n b$, se não desloca, estará em b o traço horizontal da recta; como a recta rebatida em $M N$ incontra o plano vertical em A, segue-se que, para ter o traço vertical da recta, não temos mais que vêr qual é a posição que o ponto A toma quando se desfizer o rebatimento; conduzindo pois o ponto A para a, por meio do arco $A a$, estará em a o traço vertical pedido da recta dada.

Vemos pois que, ainda n'este caso excepcional, não offerece difficuldade alguma a resolução do problema em que se pede para achar os traços de uma recta dada.

Problema X. *Por um ponto dado* (m m') (*fig.* 27) *conduzir um plano parallelo a outro plano* P *dado pelos seus traços.* E' evidente que dois planos parallelos devem ter seus traços respectivamente parallelos; por isso bastará achar um ponto de cada um dos traços do plano pedido. Para isso imaginamos conduzida pelo ponto dado ($m\ m'$) uma *recta auxiliar* situada no plano desconhecido procurado. Uma recta passando por ($m\ m'$), e *parallela ao traço horizontal* do plano, satisfaz a esta ultima condição; se tirarmos pois por m a recta $m b$ parallela ao traço horizontal do plano P e por m' a recta $m' b'$ parallela á linha-de-terra, serão ($m b$, e $m' b'$) as projecções de uma recta existente no plano procurado. O seu traço vertical b' pertencerá evidentemente ao traço vertical do plano pedido, o qual traço é portanto a recta $b' Q$ parallela ao traço vertical do plano dado; e o traço horizontal, passando por Q, é a recta $Q c$ parallela ao traço horizontal do plano P. Para verificação, poderemos construir directamente um ponto do traço horizontal do plano desconhecido. Basta para isso imaginar pelo ponto (m, m') uma *recta auxiliar parallela ao traço vertical* do plano procurado; as suas projecções são $m c$ parallela á linha-de-terra, e $m' c'$ parallela ao traço vertical do plano dado. Procurando o traço horizontal d'esta recta auxiliar, elle deve pertencer ao traço horizontal do plano procurado; assim a recta $c\,Q$ já construida deve passar pelo ponto c. A recta auxiliar existente no plano procurado e *parallela ao traço horizontal* d'esse plano, chama-se uma *horizontal do plano*; a recta auxiliar existente no plano pedido e *parallela ao seu traço vertical*, chama-se uma *vertical do plano*.

Devemos notar que na nossa figura não suppuzemos que os planos existissem realmente; se assim tivessemos supposto, o plano procurado teria ficado invisivel e os seus traços seriam representados a pontos. Foi para evitar confusões que imaginámos que apenas se procuravam os traços do plano parallelo ao outro plano cujos traços eram conhecido.

Problema XI. *Achar a intercessão de dois planos* P *e* Q *dados pelos seus traços.* 1.º Os traços cortam-se nos limites do desenho. Se prolongarmos os dois traços horizontaes (fig. 30) até que elles se cortem em b, este ponto pertence evidentemente á intercessão dos dois planos, e, visto que elle está no plano horizontal, será o traço horizontal da intercessão procurada. Do mesmo modo o ponto a' onde se cortam os traços verticaes dos dois planos P e Q, será o traço vertical da sua intercessão; conhecidos os dois traços da recta intercessão dos dois planos, facil é, como vimos, determinar as duas projecções d'essa intercessão, as quaes serão $(a\,b,\ a'\,b')$.

2.º *Se dois dos traços dos dois planos dados, por exemplo, os horizontaes, fôssem parallelôs*, como succede para os planos $a'\,Q\,S$ e P (fig. 30), o ponto b afastar-se-hia para o infinito, e o ponto b' afastar-se-hia, por conseguinte, para o ponto tambem situado no infinito da linha-de-terra, e a intercessão dos dois planos dados tornar-se-hia uma horizontal de qualquer d'elles, tendo para projecções $a'\,b'$, parallela á linha-de-terra e $a\,b_1$, parallela aos traços horizontaes dos planos P e Q. Deviamos já esperar este resultado, visto que, passando os dois planos dados por duas rectas parallelas (os seus traços horizontaes), a sua intercessão deve ser uma recta parallela a estas, isto é, uma horizontal de ambos os planos.

Se fôssem parallelos os traços verticaes dos dois planos dados, a intercessão seria uma vertical dos dois planos, o que se vê como precedentemente foi dito para o caso de serem parallelos os traços horizontaes.

3.º Quando os traços forem respectivamente parallelos ao mesmo tempo sobre os dois planos de projecção, os planos dados serão evidentemente parallelos entre si e não haverá intercessão, a não ser que estes traços sejam respectivamente parallelos á linha-de-terra: pois dois planos assim collocados podem ainda contar-se segundo uma recta parallela a $L\,T$, mas o methodo precedente já não póde dar-nos a intercessão dos dois planos. N'este caso (fig. 31), conduza-se um plano auxiliar qualquer X e procurem-se, pelo methodo descripto, as suas intercessões ($c\,d$, $c'\,d'$) e ($e\,f$, $e'\,f'$) com os dois planos dados P e Q.

Estas duas intercessões fornecerão, pelo seu incontro, um ponto ($m\,m'$) que será evidentemente commum aos dois planos P e Q e, por conseguinte, elles terão para intercessão a recta ($A\,m$, $A'\,m'$) parallela a $L\,T$ e passando por (m, m').

Poderiamos, para resolver o problema, empregar um *plano de perfil* (isto é, perpendicular á linha-de-terra), como plano auxiliar. Este plano cortaria os planos de projecção segundo as duas rectas $X\,V$ e $X\,Z$ das quaes a ultima tomará a posição $X\,Z''$ quando se rebater o plano de perfil sobre o plano horizontal, fazendo-o girar em-torno do seu traço horizontal $X\,V$ como charneira. Os pontos P' e T' em que o plano de perfil incontra os traços verticaes dos planos propostos, tomam, depois do rebatimento, as posições P'' e T''; logo $P\,P''$ e $T\,T''$ são os traços d'estes planos sobre o plano de perfil rebatido em $Z''\,X\,V$; e, como estes traços se cortam em A'', está ahi um ponto da intercessão dos planos dados P e Q.

Se pois projectarmos A'' em A, concluiremos que a intercessão procurada tem para projecção horizontal a recta $A\,m$ parallela a $L\,T$. Se levantarmos o perfil, para desfazer o rebatimento, o ponto rebatido em A'' projectar-se-ha verticalmente em A' e a recta $A'\,m'$ parallela a $L\,T$ será a segunda projecção da intercessão dos planos P e Q dados.

4.º *Supponhamos que os quatro traços se cruzam no mesmo ponto da linha-de-terra;* n'este caso podemos fazer uso de um plano auxiliar qualquer X, mas, para commodidade do desenho, convem escolher os seus traços fazendo angulos proximamente rectos com os traços dos planos dados P e Q. Procura-se depois pelo processo descripto no 1.º caso as intercessões do plano auxiliar X com os dois planos P e Q; as duas intercessões incontram-se n'um ponto (m, m') que pertence á intercessão dos planos dados; outro ponto da intercessão está no ponto da linha-de terra em que por hypothese os quatro traços se incontram; aconselhamos o leitor a fazer a figura relativa a este caso.

5.º *Se um dos planos dados passa pela linha-de-terra,* este plano é dado pelos seus traços confundidos na linha-de-terra $L\,T$ (fig. 32) e por um ponto (m, m') n'elle existente; tomamos então, para plano auxiliar X, o plano horizontal que passa pelo ponto $m\,m'$; este plano auxiliar corta o plano P segundo uma horizontal $(b'\,e', b\,e)$ e o plano Q (que passa pela linha-de-terra) segundo a recta $(m'\,e'\,m\,e)$ parallela á linha-de-terra.

O incontro (e, e') das duas intercessões auxiliares dá um ponto (e, e') por onde passa a intercessão procurada, a qual devendo tambem passar por g é $(g\,e, g\,e')$.

6.º *Se um dos planos dados é parallelo a um dos planos de projecção*, por exemplo, ao plano horizontal, a intercessão é uma horizontal do outro plano; assim na fig. 32 a intercessão dos planos X e P é a recta $(b'\,e', b\,e)$, pois effectivamente o ponto b' pertencendo aos dois traços verticaes dos dois planos é traço da sua intercessão, a qual por outro lado é parallela ao traço horizontal de P, porque o plano X e o plano horizontal são por hypotheses parallelos. Se um dos planos dados fôsse parallelo ao plano vertical, a intercessão sería uma vertical do outro plano.

7.º *Supponhamos ainda o caso em que os dois traços de cada plano se confundem em uma só recta* (fig. 33).—Estando os dois traços a' e b da intercessão então confundidos n'um só ponto, é evidente que a intercessão procurada está situada n'um plano perpendicular á linha-de-terra; as suas duas projecções são pois ambas perpendiculares á linha-de-terra, e conhecem-se ao mesmo tempo dois dos seus pontos que são os pontos a' e b. Notaremos ainda que esta intercessão I faz angulos eguaes com os dois planos de projecção, visto que ella fórma um triangulo isosceles com as suas duas projecções.

8.º Consideremos finalmente o caso em que *os traços horizontaes dos dois planos não se cortam nos limites do desenho*. Como se sabe, dois planos parallelos são cortados por um terceiro plano segundo rectas parallelas; se pois construirmos um plano auxiliar X (fig. 34) parallelo ao plano Q, a sua intercessão $(c\,d, c'\,d')$ com o plano P será parallela á intercessão $(a\,b, a'\,b')$ dos dois planos P e Q.

Ora conhece-se um ponto b' d'esta intercessão; basta pois conduzir por b' uma recta parallela a $c'\,d'$ e por b uma recta parallela a $d\,c$, para ter as projecções $(b\,a, b'\,a')$ da intercessão procurada. Proceder-se-hia identicamente, se fôssem os traços verticaes que não se incontrassem nos limites do desenho.

Problema XII. *Sendo dada a projecção horizontal de uma recta* c d *existente n'um plano, achar a outra projecção.* Seja $c\,d$ a projecção horizontal da recta (fig. 34) e P o plano. A recta desconhecida incontrará o plano vertical n'um ponto, que deve ser projectado horizontalmente em *d*; por outro lado, o traço vertical da recta, devendo estar no traço vertical do plano *P* que a contêm, estará necessariamente em *d'* que é um ponto da projecção vertical procurada.

Por identicos motivos se conclue que a recta tem o seu traço horizontal em *c*; logo projectando *c* em *c'*, sobre a linha-de-terra, será *d' c'* a projecção vertical da recta proposta. Do mesmo modo se determinaria a projecção horizontal, se a vertical fôsse a conhecida. Se a projecção *b e* dada fôsse como na fig. 32 parallela ao traço horizontal do plano *P* dado, obteriamos como precedentemente o traço vertical *b'* da recta desconhecida; o traço horizontal estaria sobre o traço horizontal do plano *P*, no infinito, e, projectando-se sobre o ponto da linha-de-terra situado no infinito, será a projecção vertical pedida parallela á linha-de-terra, isto é, será *b' e'*.

Já deviamos esperar que assim fôsse, porque, não tendoa recta em questão traço horizontal, ella é parallela ao plano horizontal, e portanto a sua projecção vertical, que deve passar por *b'*, é parallela á linha-de-terra.

Problema XIII. *Conhecida a projecção horizontal de um ponto, determinar a sua projecção vertical, conhecendo-se um plano em que esse ponto está situado.* Seja *e* a projecção horizontal do ponto e *P* o plano (fig. 32). Tirando por *e* uma recta qualquer, para representar a projecção horizontal de uma recta existente no plano *P*, e determinando, como foi dito, a projecção vertical d'essa recta, basta depois projectar o ponto *e* n'essa projecção vertical, para ter a projecção vertical *e'* do ponto (*e*, *e'*); de todas as rectas em numero infinito passando por *e* fica mais simples escolher como na fig. 32 a horizontal do plano e sobre a sua projecção vertical *b' e'* projectar em *e'* o ponto *e*. Identicamente se procede, quando é conhecida a projecção vertical do ponto, e se quer a projecção horizontal.

Emprega-se então para recta auxiliar uma vertical do plano *P*, e cuja projecção vertical passa por *e'*.

Problema XIV. *Achar o ponto de intercessão de uma recta com um plano dado.*— O methodo geral para resolver este problema consiste em fazer passar pela recta dada um plano qualquer *X* e achar a intercessão *I* d'este plano auxiliar *X* com o plano dado *P*; vendo onde esta intercessão *I* incontra a recta dada *D*, temos o ponto pedido.

Entre os planos secantes que se podem fazer passar por *D* podem distinguir-se cinco que será preferivel escolher, quando a disposição da figura o permittir, a saber:

1.º O plano projectante horizontalmente da recta D;

2.º O plano projectante verticalmente de D;

3.º O plano conduzido por D parallelamente á linha-de-terra;

4.º O plano cujo traço horizontal é parallelo ao traço horizontal do plano dado P;

5.º O plano cujo traço vertical é parallelo ao traço vertical de P.

Adoptemos para plano secante o plano vertical que projecta a recta horizontalmente segundo $a\,b$ (fig. 35). Esta linha $a\,b$ é mesmo o traço horizontal do plano auxiliar e o seu traço vertical será a recta $c\,c'$ perpendicular á linha-de-terra. Posto isto, o plano $a\,c\,c'$ corta o plano dado P segundo a recta projectada em ($c'\,d'$, $c\,d$) e, como a projecção vertical $c'\,d'$ d'esta intercessão incontra a projecção vertical $a'\,b'$ da recta dada no ponto m', segue-se que este ponto é a projecção vertical do ponto procurado. A projecção horizontal do ponto M não é conhecida immediatamente, porque tanto a intercessão dos dois planos como a recta dada teem a mesma projecção horizontal $a\,c$; mas para ter essa projecção horizontal de M basta baixar de m' uma perpendicular á linha-de-terra até incontrar $a\,b$ no ponto m. Assim o ponto (m, m') é o ponto em que a recta dada D incontra o plano dado P.

Empreguemos agora para plano auxiliar o plano projectante verticalmente da recta; os seus traços são $a'\,b'$ e $b'\,f$ perpendicular á linha-de-terra (visto que o plano auxiliar é perpendicular ao plano vertical).

Este plano auxiliar $a'\,b'\,f$ corta o plano dado segundo a recta ($f\,g$, $b'\,g'$), e a projecção horizontal $f\,g$ d'esta intercessão incontra-se com a projecção horizontal $a\,b$ da recta dada n'um ponto que deve ser o ponto m já dado pela primeira construcção; da projecção m se conclue a projecção m', e vemos que, fazendo uso ao mesmo tempo das duas construcções, ellas servem de verificação.

O plano dado, sendo supposto realmente existente, torna invisivel a porção da recta ($a\,b$, $a'\,b'$) que fica abaixo do ponto de secção; é por isso que na figura se representou a pontos a porção ($m\,b$, $m'\,b'$); a porção $b\,c$ representada a traços é considerada como linha auxiliar da construcção. Aconselhâmos o leitor a exercitar-se na resolução d'este problema empregando um plano qualquer passando pela recta dada para plano auxiliar, ou mais simplesmente fazendo emprego de algum dos tres planos que apontamos, como mais convenientes para a resolução do problema, além dos dois que empregamos na nossa construcção e que realmente são os que mais commoda e simplesmente convem empregar.

Problema XV. *Fazer passar por um ponto dado uma recta que incontre duas rectas dadas.* Indicaremos sómente a maneira de resolver o problema.

Pelo ponto dado e por cada uma das rectas dadas faça se passar um plano; é claro que, procurando a intercessão dos dois planos, esta recta satisfaz á condição de passar pelo ponto e incontrar as duas rectas (isto é: esta intercessão é a recta procurada). Poder-se-hia resolver o problema fazendo uso de um só dos dois planos, e procurar, como se viu no problema antecedente, a intercessão d'esse plano com a outra recta; unindo este ponto de intercessão com o ponto dado temos a recta que satisfaz ao problema. Em geral o problema tem uma só solução, mas haverá um numero infinito d'ellas quando o ponto e as duas rectas estiverem n'um unico plano; se as duas rectas forem parallelas, a recta procurada obtem-se immediatamente tirando pelo ponto dado uma parallela ás duas rectas dadas, e que as incontrará no infinito. Se as duas rectas se incontram, basta unir o seu ponto commum com o ponto dado.

Problema XVI. *Achar a intercessão de tres planos.* Como se sabe, tres planos interceptam-se n'um ponto; para ter este ponto, sendo os planos P, Q e R, basta achar primeiro a intercessão de P com Q, por exemplo, e depois a de P com R ou Q com R; o ponto de incontro d'estas duas intercessões é o ponto pedido commum aos tres planos.

Problema XVII. *Achar a mais curta distancia de um ponto um plano.* Antes de resolver este problema, convem demonstrar duas proposições reciprocas uma da outra:

1.º *Quando uma recta é perpendicular a um plano, as suas projecções são perpendiculares aos traços do plano.*—Com effeito o plano projectante horizontalmente da recta dada segundo $a\,b$ (fig. 35) é perpendicular ao plano horizontal, e, como passa pela recta dada que por hypothese é perpendicular ao plano dado, este plano projectante é tambem perpendicular ao plano dado; sendo o plano projectante perpendicular, ao mesmo tempo, ao plano horizontal e ao plano dado, elle é perpendicular á sua intercessão, que é o traço horizontal do plano dado; sendo pois este traço horizontal perpendicular ao plano projectante, elle é perpendicular á projecção $a\,b$ que existe n'esse plano, como se queria demonstrar. Do mesmo modo se provará que a projecção vertical $a' b'$ da recta dada é perpendicular ao traço vertical do plano dado.

2.º *Se as duas projecções de uma recta são respectivamente perpendiculares aos traços de um plano, a recta é perpendicular ao plano.* Com effeito, o plano projectante cujo traço é $a b$ é evidentemente perpendicular ao traço horizontal do plano P e portanto ao proprio plano P que contém esta linha; do mesmo modo o plano projectante verticalmente da recta, tendo o seu traço $a' b'$ perpendicular por hypothese ao traço vertical de P, é perpendicular a esta recta, e portanto ao plano P que a contém.

D'aqui se conclue que o plano dado, sendo ao mesmo tempo perpendicular aos dois planos projectantes, é perpendicular á sua intercessão, que não é mais que a recta no espaço, como se queria provar.

Quando as linhas projectantes não são respectivamente perpendiculares aos planos de projecção, estes dois theoremas reciprocos não são verdadeiros; isto é, estes theoremas só teem logar quando se trata de projecções *orthogonaes*, deixando de ser verdadeiros quando se trata de um systema de projecções *obliquas*.— Quando se trata de duas rectas perpendiculares, as suas projecções orthogonaes sobre um plano qualquer, só serão perpendiculares quando uma das rectas, pelo menos, seja parallela ao plano de projecção.

Vejamos agora como se resolve o problema de que tratamos. Do ponto dado $a\ a'$ baixemos uma perpendicular indefinida $(a\ b,\ a' b')$ ao plano dado; as projecções d'essa recta são, como acabamos de provar, perpendiculares respectivamente aos traços do mesmo plano; depois procuramos o ponto $m\ m'$ em que esta perpendicular atravessa o plano, o que se consegue como dissémos; $(a\ m,\ a' m')$ são as projecções da mais curta distancia pedida; e, se quizermos a verdadeira grandeza d'esta recta, não temos mais, como já se disse, que tirar a horizontal $m' m''$ que passa por m' e marcar n'ella, a partir da vertical $a\ a'$, uma quantidade egual a $a\ m$, o que fará obter o ponto m'' e a recta $a' m''$ será a verdadeira distancia do ponto dado ao plano.

Problema XVIII. *Por um ponto dado fazer passar um plano perpendicular a uma recta dada.* Para resolver este problema, basta lembrar que os traços do plano serão, como demonstrámos, perpendiculares respectivamente ás projecções da recta dada, e por conseguinte, para ter estes traços, basta determinar um dos seus pontos. Para este effeito (fig. 44) imaginemos *uma horizontal* do plano procurado e passando pelo ponto dado (c, c').

Como sabemos; esta recta é parallela ao traço horizontal do plano procurado, e por conseguinte a sua projecção horizontal será perpendicular á projecção horizontal $a\,b$ da recta dada (visto que o mesmo deve succeder ao traço horizontal do plano), e a sua projecção vertical será parallela á linha-de-terra.

Essa *horizontal* terá pois as projecções $c\,d$, $c'\,d'$; o seu traço vertical estará em d, d' e será ahi um ponto do traço vertical do plano pedido, e que contêm esta *horizontal*; se, por conseguinte, pelo ponto d' conduzirmos uma recta perpendicular a $a'\,b'$, será esta recta $d'\,q$ o traço vertical do plano pedido, e a recta $q\,p$ perpendicular a $a\,b$ será o traço horizontal do mesmo plano.

Problema XIX. *Achar a mais curta distancia de um ponto* c, c' *a uma recta dada.* Para resolver este problema basta pelo ponto dado c, c' tirar um plano perpendicular á recta dada $(a\,b, a'\,b')$ (fig. 44), procurar o ponto em que a recta dada atravessa o plano, e unir este ponto com o ponto dado; a recta que une os dois pontos satisfaz á questão, visto que, além de passar pelo ponto dado, é perpendicular á recta dada, pois está n'um plano perpendicular á recta e passa pelo pé da recta no plano.

Vamos fazer estas construcções.

Sendo c, c' o ponto dado, e $(a\,b,\ a'\,b')$ a recta dada, procuramos como no problema antecedente os traços do plano que passa por c, c' e que é perpendicular á recta, e achamos que esses traços são, como vimos, $d'\,q$ e $q\,p$; e, procedendo como foi dito, achamos o ponto (m, m') em que a recta dada atravessa este plano auxiliar de construcção; unindo o ponto dado c, c' com o ponto m, m' temos as projecções $c\,m$, $c'\,m'$ da recta procurada, que mede a mais curta distancia do ponto c, c' dado á recta dada $a\,b$, $a'\,b'$.

Se quizermos a verdadeira grandeza d'esta distancia, fazemos a construcção já indicada para este effeito, isto é, tomamos na horizontal $m'\,o$ um comprimento $o\,m'' = c\,m$, e traçamos a recta $c'\,m''$ que representará a verdadeira grandeza procurada.

N'esta construcção, sendo o plano $d'\,q\,p$ apenas um plano auxiliar, deveriam os seus traços na figura ser representados por linhas mixtas de pontos e pequenos traços, se a mesma figura nos não tivesse já servido n'outro problema, em que o plano em questão era o resultado do problema, e onde portanto os seus traços tinham que ser representados por linhas cheias.

Outra solução.— Pelo ponto dado c, c' (fig. 38) e pela recta dada ($a\,b$, $a'\,b'$), faça-se passar um plano; para ter os traços d'este plano, basta unir c, c' com um ponto a, a' da recta dada e achar o traço vertical d' d'esta recta ($c\,a$, $c'\,a'$) que existe no plano, cujo traço vertical será pois $b'\,d'$, e o horizontal $q\,a$. Faça-se girar todo o systema do plano, da recta e do ponto n'elle contidos em-torno do traço horizontal $q\,a$ do mesmo plano, até o rebater sobre o plano horizontal; n'este movimento o ponto b' descreve um caminho, que se projecta evidentemente na recta $b\,B$ perpendicular á charneira; e como, por outro lado, a distancia do ponto b' ao ponto q não muda, durante a rotação, o ponto b' depois do rebatimento deve estar no ponto B de $b\,B$ que é incontrado pelo arco $b'\,B$ descripto de q como centro e raio $q\,b'$; como o ponto a não se deslocou, a recta dada terá, depois do rebatimento, a posição $a\,B$; o traço vertical $q\,b'$ do plano estará em $q\,B$, e o ponto (d', d) movendo se n'um arco projectado na perpendicular $d\,D$ á charneira, terá caminhado para D, e a recta ($a\,d$, $a'\,d'$) estará em $a\,D$, e o ponto $c\,c'$ dado caminhará para C. Se pois de C se tira a perpendicular $C\,M$ a $a\,B$, esta perpendicular representará, em verdadeira grandeza, a mais curta distancia do ponto c, c' á recta dada ($a\,b$, $a'\,b'$). Se quizermos as projecções d'esta mais curta distancia (posto que em geral o que se procura seja aquella verdadeira grandeza), não temos mais que desfazer o rebatimento, por um movimento contrario áquelle que foi executado; n'esse movimento o ponto C irá para c, c' e o ponto M caminhando tambem, em projecção, perpendicularmente á charneira, irá para (m, m'), e a mais curta distancia procurada terá as projecções ($c\,m$, $c'\,m'$).

Problema XX. *Procurar, sobre uma recta dada* a b, a' b', *um ponto que diste de um outro ponto dado* c, c' *uma quantidade dada* δ.— Depois de ter feito, como dissémos no problema precedente, o rebatimento da recta e do ponto dados para $a\,B$ e C descreveremos com um raio $C\,R = \delta$ um arco de circulo que, em geral, cortará $a\,B$ em dois pontos R e R_1 que ambos, em rebatimento, satisfazem ao problema; desfazendo o rebatimento, obtemos as projecções d'estes dois pontos, das quaes só a de um R representamos na figura para a não tornar susceptivel de confusão. As projecções de R são pois (r, r').

Podia o problema ser impossivel se a distancia δ fôsse tal que o arco $R\,R_1$ não incontrasse a recta $a\,B$. Haveria uma só solução, quando aquelle arco fôsse tangente á recta $a\,B$, e n'este caso o ponto procurado seria M, isto é, m, m', ou o pé da perpendicular baixada de (c, c') sobre $(a\,b, a'\,b')$. Mas, em geral, o problema admitte duas soluções, correspondendo ás duas obliquas eguaes, que de um ponto se podem tirar para uma recta.

Problema XXI. *Achar o centro e o raio do circulo que passa por tres pontos dados no espaço.* Procurem-se, como foi dito, os traços do plano determinado pelos tres pontos. Rebata-se esse plano em-torno do seu traço horizontal, como se suppoz nos dois problemas precedentes, e procurem-se, como se disse, as posições que depois do rebatimento tomam os tres pontos primitivos; então é facil, com tres pontos n'um plano, achar o raio e o centro do circulo que por elles passa, sendo o raio conhecido em verdadeira grandeza; querendo as projecções do centro e de um qualquer raio que se trace no rebatimento, nada mais ha então senão desfazer o rebatimento, como precedentemente foi dito. Aconselhamos o leitor a exercitar-se em fazer a figura relativa a este caso, e que, por outro lado, não apresenta a menor difficuldade.

Problema XXII. *Por uma recta dada fazer passar um plano perpendicular a um plano dado pelos seus traços.* Por um ponto qualquer da recta tire-se uma outra recta perpendicular ao plano dado; já sabemos que as projecções d'esta recta são respectivamente perpendiculares aos traços do plano; todo o plano que passe por esta recta é perpendicular ao plano dado; por conseguinte, para resolver o nosso problema, não temos mais que fazer passar um plano pela recta dada e pela recta auxiliar, e para conseguir este resultado basta, como se sabe, procurar os traços das duas rectas, que, unidos dois a dois respectivamente, darão os traços do plano pedido.

Se a recta dada fôsse perpendicular ao plano dado, haveria uma infinidade de planos que resolveriam o problema.

Problema XXIII. *Achar o angulo de duas rectas dadas.* Sejam $(a\,b, a'\,b'_1)$, $(b\,c, b'_1\,c'_1)$ as duas rectas (fig. 36). Ellas, em geral, não se incontrarão, e chama se angulo das duas rectas ao angulo formado por duas linhas que, por qualquer ponto do espaço, sejam tiradas parallelamente ás rectas. Ora se as rectas dadas se incontrassem, esse incontro teria evidentemente logar n'um ponto que tivesse para projecções b e b'_1; mas, não estando os pontos b e b'_1, na mesma perpendicular á linha-de-terra, é claro que não são elles as projecções de um mesmo ponto do espaço; e portanto não ha duvida de que as rectas dadas não se incontram; tiremos, portanto, por um ponto do espaço duas parallelas ás duas rectas, e para simplificação escolhemos o ponto b' de $(a\,b,\ a'\,b')$ que se projecta horizontalmente em b, e não teremos mais que procurar os angulos das rectas $(a\,b,\ a\,b')$ e $(b\,c,\ b'\,c')$, tendo por b' tirado $b'c'$ parallela a $b'_1\,c'_1$.

Ora, para ter este angulo, notaremos que, se acharmos os traços horizontaes a e c d'estas duas rectas e os unirmos, as duas rectas dadas formam com $a\,c$ um triangulo, em que esta ultima linha é a base, sendo o angulo no vertice o angulo procurado. Poderiamos procurar as verdadeiras grandezas dos lados d'este triangulo e construil-o, e teriamos assim o angulo no vertice, mas é mais facil proceder d'outro modo: podemos observar que a altura do triangulo projectado horizontalmente em $a\,b\,c$, é uma perpendicular tirada do ponto projectado em b, para a base $a\,c$; ora esta perpendicular é evidentemente a hypotenusa de um triangulo rectangulo em que a base é a recta $b\,h$, e a altura é a recta projectante horizontalmente de b, e que tem a grandeza $b'\,l$. Logo, se sobre a linha-de terra tomarmos $l\,k = b\,h$, será $b'\,k$ a altura do triangulo projectado em $a\,b\,c$; se rebatermos este triangulo, fazendo-o girar em-torno de $a\,c$, o seu vertice $b\,b'$ caminhará, na projecção horizontal, sobre a perpendicular $h\,b$ á charneira, e irá para um ponto B de modo que $B\,h = b'\,k$ e o angulo procurado será $a\,B\,c$.

Se das duas rectas dadas uma, por exemplo $(b\,c,\ b',\ c',)$, é parallela ao plano horizontal, o triangulo de que nos servimos não existirá, o traço c está no ponto de $b\,c$ situado no infinito, e portanto o traço $a\,c$ do plano do triangulo é parallelo a $b\,c$ e passa por a; fazendo o rabatimento, como precedentemente, obtem-se o angulo em questão. Se ambas as rectas fôssem parallelas ao plano horizontal, então o angulo, em projecção horizontal, seria egual ao proprio angulo no espaço.

Problema XXIV. *Achar a bissectriz do angulo formado por duas rectas que se incontram.* Para resolver este problema faz-se o rebatimento indicado no problema precedente, e construe-se a bissectriz do angulo rebatido. Em seguida, desfaz-se o rebatimento, e é bem facil achar as projecções da bissectriz, notando que se sabe qual é a posição que toma o vertice do angulo, e que o ponto em que aquella recta incontra a charneira $a\,c$ não se desloca, durante a rotação que desfaz o rebatimento.

Problema XXV. *Dada uma recta contida n'um plano co-*

nhecido, traçar n'este plano outra recta que faça com a primeira um angulo dado, e que passe por um ponto dado no mesmo plano. Fazendo o rebatimento do plano dado (e que pode ser determinado pelo conhecimento da recta e do ponto dado) em-torno do seu traço horizontal, por exemplo, vendo quaes as posições que tomam a recta e o ponto, é facil, em rebatimento, traçar uma recta que passe pelo ponto rebatido e que vá formar com a recta dada tambem rebatida o verdadeiro angulo dado; desfazendo o rebatimento, é sempre facil achar as posições que toma a nova recta (cujo traço horizontal não muda), quando a recta e o ponto dado fôrem para suas primitivas posições, notando mais que as projecções da nova recta devem então passar pelas do ponto dado.

Para mostrar esta construcção serve perfeitamente a fig. 38 em que a recta é $(a b, a' b')$ e o ponto é (c, c'); a recta $(c m, c' m')$ construida como foi dito, corresponde ao caso particular em que o angulo dado é de 90°. Para qualquer outro angulo $C R M = \triangle^{o}$ ha em geral duas soluções, pois ha em geral outro angulo $C R_1 M = \triangle^{o}$ que tambem satisfaz ao problema; este problema tem muita analogia com o problema XIX, e inviamos o leitor para esse ponto, no que possa ter de duvida a respeito do traçado graphico do desenho, traçado que então foi largamente exposto.

Problema XXVI. *Achar o angulo formado por uma recta com um plano.* Este problema pareceria indeterminado, se não se convencionasse chamar angulo de uma recta com um plano ao menor angulo que a recta fórma com o plano, isto é, ao angulo da recta com a sua projecção orthogonal no plano.

Por conseguinte, se de qualquer ponto da recta baixarmos sobre o plano dado uma perpendicular, esta perpendicular formará com a recta dada um angulo que, sendo *complementar* do angulo pedido, nos permittirá facilmente determinar este ultimo.

Seja $(a b, a' b')$ a recta (fig. 36) e P o plano dado.

De um ponto qualquer (b, b') da recta, tiremos a perpendicular $(b c, b' c')$ ao plano, e sabemos já que as projecções d'esta recta são perpendiculares respectivamente aos traços do plano; procurando, como se disse, o traço horizontal (c, c') da perpendicular ao plano, e o traço horizontal (a, a') da recta dada, teremos o traço horizontal $a c$ do triangulo projectado em $a b c$, e acha-se, como foi dito no problema XXIII, o angulo $a B c$ da recta dada e da perpendicular ao plano; sendo o angulo pedido complementar do angulo achado $a B c$, se titarmos a perpendicular Bd a Bc, será aBd o angulo procurado da recta dada com o plano dado.

Problema XXVII. *Achar o angulo que uma recta fórma com os dois planos de projecção.* Este problema poderia ser resolvido como o precedente, mas é mais simples resolvêl-o de um outro modo.

Comtudo, notemos que verdadeiramente já resolvemos este problema quando no problema I do cap. II tratámos de achar a verdadeira grandeza do segmento de uma recta entre dois póntos. pois dissémos então que desde que a recta fôsse parallela a um dos planos de projecção (por exemplo, o vertical) á sua projecção sobre este plano faria com a linha-de-terra um angulo egual ao que a recta faz com o outro plano de projecção (n'este caso o horizontal); e vimos como era facil tornar a recta parallela a um qualquer dos planos de projecção, fazendo-a girar em-torno da projectante de um qualquer dos seus pontos sobre o outro plano de projecção. Mas agora, na resolução d'este problema, seguindo ainda o mesmo methodo, tomamos para eixos de rotação as projectantes dos traços da recta, o que simplifica mais as construcções e torna mais simples a resolução do problema seguinte em que nos serviremos da mesma figura. N'este modo de proceder, faz-se um verdadeiro rebatimento da recta sobre um dos planos de projecção, e o angulo que a recta rebatida fórma com a linha-de-terra é o angulo formado pela recta no espaço com o outro plano de projecção. Sendo $(a\,b,\ a'\,b')$ a recta (fig. 37), fazendo-a girar em-torno da projectante $a\,a'$ como charneira, até a rebater sobre o plano vertical, o ponto a' não se desloca, e o ponto b descreve o arco de circulo $b\,b''$ com centro em a, de modo que a recta toma a posição $a'\,b''$, e o angulo $a'b''a$ é o angulo que a recta no espaço fórma com o plano horizontal. Rebatendo agora a recta, em-torno da projectante $b\,b'$, sobre o plano horizontal, ella toma a posição $b\,a''$, descrevendo o ponto a' um arco de circulo com centro em b', emtanto que o ponto b fica agora immovel durante o rebatimento. O angulo $ba''b'$ é o angulo que a recta no espaço fórma com o plano vertical de projecção.

Problema XXVIII. *Por um ponto dado fazer passar uma recta que fórme o angulo α com o plano horizontal e o angulo β com o plano vertical.* Seja $e,\ e'$ o ponto dado (ponto que não está representado na figura); tomemos no plano vertical um ponto arbitrario a' (fig. 37), que consideramos como traço vertical de uma recta, e tracemos a recta $a'\,b''$ de modo que ella faça com a linha-de-terra o angulo α dado. Se fizermos girar a recta $a' b''$, em torno da projectante $a' a$, a recta descreverá um cóne de revolução tendo para eixo $a' a$ e nunca deixará, em todas as posições que pode tomar quando o ponto b'' caminha sobre o arco de circulo $b'' b$ indefinido, e descripto de a como centro, de fazer como plano horizontal o angulo α exigido pelo problema. Resta entre todas estas posições, em numero infinito, escolher aquella ou aquellas, em que a recta fórma ao mesmo tempo com o plano vertical o angulo β, dado pelo problema. Para conseguir este resultado tiremos por a' a recta $a' b_1$, formando um angulo β com $a' b''$ e de b'' tiremos a perpendicular $b'' b_1$ sobre $a' b_1$; o triangulo rectangulo $a' b_1$, b'', tendo $a' b''$ egual á recta no espaço e o angulo β egual ao que a mesma recta deve formar com o plano vertical, é evidentemente igual ao triangulo rectangulo que tem para hypotenusa a recta procurada no espaço e para um dos cathetos a sua projecção vertical; logo o catheto $a' b_1$, é egual á projecção vertical da recta pedida; descrevendo o arco b_1, b', com centro em a', será $a' b'$ a projecção vertical da mesma recta; o traço horizontal devendo existir no arco indefinido $b'' b$ e na perpendicular $b' b$ á linha-de-terra estará em b; e a recta que satisfaz á condição de fazer o angulo α com o plano horizontal e o angulo β com o vertical é pois $(a b, a' b')$; para acabar de resolver o problema não ha mais que tirar pelo ponto dado (e, e'), uma recta parallela a $(a b, a' b')$.

Convem notar que, em geral, este problema tem quatro soluções.— Com effeito, emquanto a recta gira, descrevendo o cóne de revolução, ella pode evidentemente tomar quatro posições em que faz o mesmo angulo β com o plano vertical; duas d'estas posições estão no primeiro quadrante e outras duas no segundo, e das duas projecções verticaes só duas são distinctas; o mesmo succede ás projecções horizontaes, mas, como devia ser, visto que as quatro rectas são distinctas, quando para duas se confundem as projecções verticaes, são distinctas as horizontaes e *vice-versa*. Estas quatro soluções do problema correspondem na figura aos casos de a recta $a' b''$ ser tirada para a direita ou para a esquerda da vertical $a a'$ e de, n'um ou n'outro d'estes casos, se considerar o traço horizontal da recta movel $a' b''$ áquêm ou álêm do plano vertical, em posições symetricas a respeito da linha-de-terra, sobre a circumferencia da base do cóne de revolução que a recta $a' b''$ gera em-torno de a, a' sem deixar de fazer o angulo α com o plano horizontal; se tomassemos o ponto a' abaixo da linha-de-terra, achariamos mais quatro rectas satisfazendo ás condições do problema, emquanto aos angulos com os planos de projecção; mas, sendo essas rectas evidentemente parallelas respectivamente duas a duas ás quatro já chadas, não dariam logar a rectas disctintas das quatro já conduzidas pelo ponto dado e, e' e satisfazendo ao problema.

Problema XXIX. *Achar os angulos que fórma um plano dado com os dois planos de projecção.* O angulo de dois planos é medido, como se sabe, pelo rectilineo d'esse angulo diedro, e este rectilineo é o angulo formado pelas duas rectas que resultam da intercessão dos dois planos com um terceiro plano perpendicular á sua intercessão; posto isto, se quizermos saber o angulo do plano $a'\,q\,b$ (fig. 39) com o plano horizontal, cortaremos os dois planos por um terceiro $a'\,a\,d$ que seja perpendicular á intercessão $q\,b$ dos dois primeiros; o angulo pedido é o angulo formado pela linha $a\,d$ com a linha que tem o traço vertical em a' e o horizontal em d (e que não está representada na figura); note-se que o rectilineo procurado pertence a um triangulo rectangulo, que tem para hypotenusa a linha que vai de a' a d, e por um dos cathetos a recta $a\,d$; transportando $a\,d$ para a linha-de-terra para $a\,d_1$, será $a'\,a\,d_1$, um triangulo rectangulo egual áquelle de que falamos, e o angulo $a'\,d_1\,a$ é o angulo pedido, que o plano dado faz com o plano horizontal. Do mesmo modo, cortando o plano dado e o plano vertical por um plano $b\,a\,c$ perpendicular á intercessão $a'\,q$ d'aquelles dois planos, o rectilineo do diedro que elles formam será pertencente a um triangulo rectangulo, que tem $a\,c$ para um dos cathetos e em que a hypotenusa tem os seus traços vertical e horizontal em c e b; transportando por um arco de circulo, com centro em a, o ponto c para c_1, será o triangulo $b\,a\,c_1$ egual ao triangulo referido, e o angulo $a\,c_1\,b$ egual ao angulo pedido do plano dado com o plano vertical.

N'algumas artes, um plano é muitas vezes definido pelo seu traço horizontal e pelo angulo que fórma com o plano horizontal; e vê-se bem que os dois dados precedentes permittem facilmente achar o traço vertical do plano dado. Com effeito, imaginemos um plano de perfil $a\,a'\,d$ perpendicular a $b\,q$; este plano contêm o angulo rectilineo α; rebata-se $a\,d$ para $a\,d_1$, e forme-se o angulo $a'\,d_1\,a = \alpha$; o lado d_1, a' vai incontrar a vertical $a\,a'$ no ponto a' por onde passa o traço vertical $q\,a'$ do plano em questão; muitas vezes nem é preciso procurar o traço vertical do plano, e para representar claramente a sua posição, e tirar d'ahi todas as consequencias necessarias, basta rebater o plano de perfil, em-torno do seu traço horizontal $a\,d$, e formar o angulo $a\,d\,m = \alpha$; o plano de perfil $a\,d\,m$ faz então as vezes de plano vertical de projecção.

Problema XXX. *Por um ponto dado fazer passar um plano que fórme um angulo dado α com o plano horizontal e um angulo tambem dado β com o plano vertical.* Os dois planos secantes de perfil $a'\,a\,d$ e $b\,a\,c$ (fig. 39), de que nos servimos para resolver o problema antecedente, são ambos perpendiculares ao plano dado; logo a intercessão dos dois planos de perfil vem a ser uma linha perpendicular ao plano dado, e medindo a mais curta distancia do ponto a da linha-de-terra a esse plano.

Mas, nos rebatimentos dos triangulos rectangulos a que no problema anterior nos referimos, aquella perpendicular ao plano dado toma já a posição $a\,g$, já a posição $a\,h$; logo é forçosamente $a\,g = a\,h$.

Posto isto, para resolver o nosso problema, construamos sobre a linha-de-terra o triangulo rectangulo $a'\,a\,d_1$, satisfazendo só á condição de ter $a'\,\widehat{d_1}, a = \alpha$; tiremos de a a perpendicular $a\,g$ sobre a hypotenusa $a'\,d_1$, e descreva-se de a, como centro, um arco de circulo indefinido com raio egual a $a\,g$. Tire-se em seguida uma tangente $b\,c_1$ a este arco, e que faça com a linha de-terra um angulo $b\,c_1\,a = \beta$; o ponto b em que esta tangente incontra a vertical $a\,b$ é um ponto por onde tiraremos a tangente $b\,q$ ao arco d, d descripto com centro em a e raio $a\,d_1$, e unindo q com a', teremos a recta $q\,a'$ que será o traço vertical de um plano $a'\,q\,b$ em que $q\,b$ é o traço horizontal, e que faz o angulo α com o plano horizontal e o angulo β com o vertical. Agora nada mais ha a fazer, para resolver o problema de que tratamos, que tirar pelo ponto dado um plano parallelo ao plano $a'\,q\,b$ que acabamos de obter, problema este que já ensinámos a resolver. Parece-nos util observar que este problema tem em geral mais de uma solução; e effectivamente, no caso da figura, poderiamos do ponto b tirar duas tangentes ao arco $d\,d_1$ prolongado, o que daria duas soluções no primeiro quadrante; haveria uma só solução, se o arco $d_1\,d$ passasse em b, porque então por b só poderiamos tirar uma tangente a esse arco, e por outro lado poderia não haver solução alguma, se o ponto b ficasse dentro do arco $d\,d_1$; no caso de haver uma só solução, os traços do plano seriam (como a figura indica) parallelos á linha-de-terra, e o mesmo succederia ao plano procurado. Parecería haver outras duas soluções para o primeiro quadrante, correspondentes aos dois casos em que se tenha tirado a linha

d_1, para a direita ou para a esquerda da vertical a' a; mas ê-se bem que em qualquer dos casos o arco descripto no lano horizontal sería sempre $d_1, d \ldots$, e as soluções seriam s que apontámos. Quer se considere a parte do arco $d_1, d \ldots$ ue está áquêm ou alêm do plano vertical, e conforme em ada um d'estes dois casos se considera o ponto a' acima ou baixo do plano vertical, teremos sempre dois planos satisfazendo ao problema; de modo que verdadeiramente, considerando os quatro quadrantes, pode haver oito planos, todos satisfazendo á condição de fazerem um angulo α com o plano horizontal e um angulo β com o plano vertical.

Este problema poderia ter sido resolvido de uma outra maneira.

Sabe-se que quando um plano fórma um angulo α com outro, uma recta perpendicular ao primeiro plano fórma com o segundo um angulo $90^\circ - \alpha$; posto isto, poderiamos construir, como foi já dito, uma recta que fizesse o angulo $90^\circ - \alpha$ com o plano horizontal de projecção e o angulo $90^\circ - \beta$ com o plano vertical. Depois tirando pelo ponto dado um plano perpendicular a esta recta (problema que já sabemos resolver) teriamos um plano que, alêm de passar por esse ponto dado, faria os angulos α e β com os planos de projecção, e portanto satisfaria ao problema.

Dissémos que havia muitas vezes possibilidade de obter 8 planos satisfazendo á condição de fazerem um angulo α com o plano horizontal e um angulo β com o plano vertical; convem comtudo observar que, sendo os dois planos construidos no 4.º quadrante respectivamente parallelos aos do 2.º e os do 1.º respectivamente parallelos aos do 3.º, pelo ponto dado, não se podem tirar, em geral, senão 4 planos distinctos, satisfazendo ao problema. O 2.º modo de o resolver, ainda nos dá o mesmo resultado: com effeito quando tratámos de resolver o problema de achar uma recta fazendo angulos dados com o plano horizontal e vertical, vimos que, nos 4 quadrantes, podiam achar-se no maximo 8 rectas, satisfazendo a estas condições; mas sendo dado um ponto por onde deve passar a recta que o problema pede, afim de que a sua posição seja perfeitamente determinada, tivemos, como dissémos, que tirar pelo ponto dado rectas parallelas áquellas que construimos nos 4 quadrantes, e notando que as rectas do 1.º quadrante são parallelas ás do 3.º, como as do 2.º o são ás do 4.º, vimos que verdadeiramente, pelo ponto dado, só poderiamos tirar 4 rectas distinctas, que satisfizessem ao problema, e por conseguinte, como por um ponto não se pode tirar mais que um plano perpendicular a uma recta, nós concluimos, como já o fizemos por outro modo, que o problema que nos occupa, só tem 4 soluções, isto é, que, pelo ponto dado, podem-se em geral fazer passar 4 planos distinctos, fazendo angulos dados com os planos de projecção.

Problema XXXI. *Construir o angulo comprehendido entre dois planos dados pelos seus traços.* Como sabemos, o angulo de dois planos é o rectilineo do diedro que elles formam, e para ter este rectilineo basta cortar os dois planos por um terceiro plano perpendicular á sua intercessão. Sejam pois $a' p b$ e $a' q b$ os dois planos (fig. 41); procuremos, como foi dito, a sua intercessão $(a b, a' b')$, e vamos conduzir um plano perpendicular a esta intercessão, e passando por um qualquer dos seus pontos. Notemos que a intercessão $(a b, a' b')$ é a hypotenusa de um triangulo rectangulo que tem para cathetos as rectas $a a'$ e $a b$; rebatendo este triangulo rectangulo em-torno de $a b$, a intercessão dos dois planos dados toma a posição $A b$. Por qualquer dos seus pontos M conduza-se uma perpendicular MN a $b A$: ella incontra $a b$ no ponto N, e a recta MN pode considerar-se o rebatimento do traço feito no plano do triangulo pelo plano secante. Vê-se pois que o traço horizontal do plano secante passa por N, e como este plano é perpendicular por hypothese á intercessão $(a b, a' b')$ dos dois planos, o traço $o r$ do plano secante será perpendicular á projecção horizontal $a b$ da intercessão. O angulo rectilineo procurado fórma com $o r$ um triangulo cuja base é $o r$, visto que as intercessões do plano secante com os dois planos dados passam por o e por r. Procuremos construir este triangulo; como conhecemos a sua base, basta procurar a sua altura; ora esta altura é precisamente egual á recta NM, que antes do rebatimento é effectivamente perpendicular á base $o r$ por existir no plano vertical que tem para traço $a b$ e que é perpendicular a $o r$; por outro lado, se fizermos o rebatimento do triangulo em questão, em-torno da sua base $o r$, o seu vertice não sahirá, em projecção horizontal, da recta $a b$, perpendicular á charneira $o r$, e portanto, transportando por um arco de circulo com o centro em N, o ponto M para V, e notando que n'este rebatimento os pontos r e o não se deslocam, veremos que o angulo $o V r$ é o angulo pedido dos dois planos.— Poderiamos ter rebatido a intercessão $(a b, a' b')$ dos planos para $a' x$ sobre o plano vertical; tirar a $a' x$ uma perpendicular qualquer $u t$, e transportar o traço t para N, para em seguida fazer as construcções que indicamos.—Podiamos resolver de outro modo este problema. Com effeito, sendo dados dois planos quaesquer P e Q (fig. 36), podemos notar que se por um ponto qualquer b, b' tirarmos rectas ($b\,a$, $b'\,a'$) ($b\,c$, $b'\,c'$) perpendiculares respectivamente aos planos P e Q, estas rectas comprehenderão entre si um angulo, que é supplementar do angulo dos dois planos.

Construindo pois (como se ensinou no problema XXIII) o angulo $a\,B\,c$ comprehendido pelas duas perpendiculares aos planos, o angulo $a\,B\,g$, supplementar de $a\,B\,c$, é o angulo pedido dos dois planos.

Consideremos agora o caso particular em que os planos tem os seus traços horizontaes parallelos. N'este caso, como vimos, a intercessão dos dois planos é uma horizontal fig. 40 $a\,b$, $a'\,b'$ dos dois planos P e Q, e tendo por conseguinte a sua projecção vertical que passa por a' parallela á linha-de-terra, e a projecção horizontal, que passa por a, parallela aos traços horizontaes dos planos dados. Um plano $a'\,a\,d$, perpendicular a esta intercessão, corta os dois planos dados segundo rectas que, tendo os seus traços horizontaes em c e d formam um triangulo tendo para base $c\,d$, e cujo angulo no vertice é o angulo pedido; notando que no espaço o vertice do triangulo está em a', se rebatermos o triangulo em-torno de $c\,d$, o vertice ficará n'um ponto f da perpendicular $a\,f$ á charneira, e tal que $a\,f = a\,a'$; e o angulo pedido será $c\,f\,d$.

Supponhamos ainda o caso em que os traços horizontaes e verticaes são todos parallelos á linha-de-terra; n'este caso sendo P e Q os planos (fig. 31), cortemol-os por um plano de perfil $V\,X\,Z$, como foi indicado a proposito da intercessão de dois planos, nas circumstancias dos precedentes P e Q E' claro que este plano de perfil, sendo perpendicular á linha-de-terra $L\,T$, e, por conseguinte, á intercessão dos planos dados, corta estes segundo duas rectas que formam o rectilineo pedido. Por outro lado, rebatendo o plano de perfil em-torno do seu traço horizontal $X\,V$, a intercessão do plano de perfil com o plano P, sendo uma recta com os traços em P e P', toma a posição $P\,P''$ depois do rebatimento, e a intercessão do mesmo plano de perfil com o plano A, sendo uma recta com os traços em T e T', toma, depois do rebatimento, a posição $T\,T''$; por consequencia o angulo $T\,A''\,P$ é o angulo pedido, que formam entre si os planos dados P e Q

Problema XXXII. *Fazer passar, por uma recta contida n'um plano dado pelos seus traços, um segundo plano que faça com o primeiro um angulo dado.* Seja ($a\,b$, $a'\,b'$) a recta dada (fig. 41) contida no plano tambem dado $a'\,q\,b$. Imaginemos a recta rebatida sobre o plano horizontal, por meio do movimento de rotação do seu plano projectante horizontalmente, em torno do traço horizontal $a\,b$; a recta tomará a posição $A\,b$. Por um ponto qualquer M da recta $A\,b$, tiremos-lhe a perpendicular $M\,N$ e pelo ponto N tiremos a perpendicular $o\,r$ a $a\,b$; transportemos M para V, por um arco de circulo, com centro em N, e una-se v com r. Tirando agora em V uma recta $V\,o$ que faça com $V\,r$ o angulo dado, prolongando $v\,o$ até incontrar a recta $o\,r$ em o, e unindo b com o, teremos o traço horizontal $b\,p$ do plano pedido; o traço vertical será obtido unindo p com a'. Poderiamos proceder de outro modo; rebateriamos a recta dada para $a'\,x$, no plano vertical; construiamos uma perpendicular qualquer $u\,t$ a $x\,a'$, transportavamos o ponto t para N, e procediamos depois como dissemos. Qualquer d'estes dois modos de proceder é perfeitamente justificado, pelo que foi dito a respeito da resolução do problema XXXI em que se procurava o angulo de dois planos dados.— E' evidente que a recta dada fica, n'este problema que acabamos de resolver, sendo a intercessão do plano dado com o plano procurado.

Se o plano dado fosse o plano P da fig. 40 e se a recta dada fosse $(a\,b,\ a'\,b')$ parallela ao traço horizontal do plano P, procederiamos do modo seguinte: construiriamos $a\,d$ perpendicular a $a\,b$ e tomariamos $a\,f = a\,a'$; unindo f com d, fariamos o angulo $d\,f\,c$ egual ao angulo dado, e pelo ponto c em que a recta $f\,c$ incontrasse $a\,d$, tirariamos uma recta parallela ao traço horizontal do plano dado; esta recta seria o traço horizontal do plano procurado; unindo o ponto em que este traço incontra a linha-de-terra com a' teriamos o traço vertical do mesmo plano. Se o plano dado fosse o plano P da fig. 31 e a recta dada $A\,m,\ A'\,m'$ fosse tambem parallela á linha-de-terra, tomariamos um plano de perfil $Z\,X\,V$ e em seguida transportariamos A' para A''; unindo P com A'' teriamos a recta $P\,A''$ que deveria passar por P'', em seguida, formariamos em A'' o angulo $P\,A''\,T$ egual ao angulo dado pelo problema, e teriamos a recta $T\,Z''$. Transportando Z'' para T' e tirando por T e T' parallelas á linha-de-terra teriamos os dois traços do plano procurado. Vê-se facilmente que este problema tem em geral duas soluções.

Problema XXXIII. *Procurar em grandeza e posição a perpendicular commum a duas rectas não existentes no mesmo plano.*— Duas rectas que existem no mesmo plano incontram-se sempre, ou a uma distancia finita ou infinita (quando são parallelas). Duas rectas que não estão no mesmo plano não podem incontrar-se; entre todas as rectas que podem incontrar duas rectas não existentes no mesmo plano ha uma que é menor que todas ellas, isto é, que mede a mais curta distancia entre as rectas dadas e esta recta que mede a mais curta distancia é, além d'isso, perpendicular ao mesmo tempo ás duas rectas propostas. Para indicarmos como se pode obter esta perpendicular commum, servir-nos-hemos de uma figura em perspectiva, para depois passar realmente a executar as construcções necessarias para resolver o problema. Sejam AB e CD as duas rectas (fig. 43) Pelo ponto arbitrario B de uma das rectas tire-se a recta BE parallela á outra recta CD, e determine-se assim o plano ABE parallelo a CD. De um ponto qualquer D de CD, tire se a perpendicular DF ao plano ABE. Nenhuma linha menor que DF pode unir um ponto de CD com um ponto de AB, como é evidente. Mas é preciso demonstrar que se pode unir um ponto de AB com um ponto de CD por meio de uma recta egual a DF. Para chegarmos a esse resultado, tiremos FG parallela a EB e portanto a CD; esta recta FG incontrará AB, pois se assim não succedesse, ser-lhe hia parallela, e o mesmo succederia ás rectas dadas AB e CD, o que é contrario á hypothese do problema. A recta FG incontra pois AB em certo ponto G, e se por este ponto tirarmos a perpendicular GH ao plano ABE, esta linha GH ficará contida no plano $CDFG$ que é já perpendicular ao plano ABE, visto que contêm a recta DF por construcção perpendicular áquelle plano. E' esta linha GH egual e parallela a DF que medirá a mais curta distancia das duas rectas dadas AB e CD; notemos que esta linha GH será perpendicular, ao mesmo tempo, ás duas rectas dadas AB e CD, visto que é perpendicular ao plano ABE que contêm uma das rectas e é parallelo por construcção á outra.

Vamos agora fazer uma demonstração *à posteriori* de que a recta GH é a menor recta que pode unir um ponto de AB com um ponto de CD. Com effeito, unindo dois pontos quaesquer p e q das duas rectas dadas, nós vêmos que a recta pq estando fóra do plano $CDFG$ (sempre que o ponto q se não confunda com G) é obliqua ao plano ABE logo é maior que a perpendicular $pr = HG$ áquelle plano; suppondo o caso de um dos pontos ser o ponto G, a recta pG obliqua a CD ainda é maior que a recta GH perpendicular a CD; bem assim uma recta qualquer Hq que unisse H com um ponto de AB sería maior que H G que é perpendicular a AB; portanto não ha duvida em que a recta HG é a unica perpendicular commum ás rectas dadas A B e C D e mede a mais curta distancia entre aquellas rectas.

E' da maneira que fica exposta, que se resolve em Geometria a tres dimensões o problema de que tratamos; como se vê, as construcções apenas são indicadas, sem serem realmente executadas; nós vamos agora pelos processos da Geometria Descriptiva executar *realmente* as construcções, mostrando assim a differença que existe entre esta ultima sciencia e a Geometria no espaço, differença que apontámos logo no principio d'este livro. Nas construcções que vamos fazer servirnos-hemos das lettras minusculas correspondentes ás lettras maiusculas adoptadas na figura em perspectiva.— Sejam $(a\,b,\ a'\,b')$ e $(c\,d_1\ c'\,d_1')$ (fig. 45) as projecções das duas rectas dadas. Como, por hypothese, ellas não estão no mesmo plano, não podem ser as suas projecções parallelas respectivamente, bem como não podem incontrar-se as rectas no espaço, e porconseguinte não podem os pontos de incontro das projecções horizontaes e verticaes estar na mesma perpendicular á linha-de-terra. Por um ponto $b\,b'$ da recta $(a\,b,\ a'\,b')$ faça-se passar a recta $(b\,e,\ b'\,e')$ parallela a $(c\,d_1,\ c'\,d_1')$, e determine-se o plano $a\,o\,b'$ que passa pelas rectas $(a\,b,\ a'\,b')$ e $(b\,e,\ b'\,e')$.

De um ponto qualquer $(d,\ d')$ da recta $(c\,d_1,\ c'\,d_1')$, tire-se a recta $(d\,f,\ d'\,f')$ perpendicular ao plano, e tendo portanto as suas projecções respectivamente perpendiculares aos traços do plano. Procure-se, como foi dito no problema XIV a intersecção da recta $(d\,f,\ d'\,f')$ com o plano $a\,o\,b'$ (servimo-nos na figura do plano projectante horizontalmente de $(d\,f, d'\,f')$, como plano auxiliar), e obter-se-ha o ponto (f, f'); de (f, f') tire-se a parallela $(f\,g,\ f'\,g')$ a $(b\,e,\ b'\,e')$, e portanto a $(c\,d, c'\,d')$, e esta recta $(f\,g,\ f'\,g')$ incontrará forçosamente, como dissemos, a recta $(a\,b,\ a'\,b')$ n'um ponto $(g,\ g')$, devendo por conseguinte para verificação das construcções, os pontos g e g' estar na mesma perpendicular $g\,g'$ á linha-de-terra. Do ponto $(g\,g')$ tira-se $(g\,h,\ g'\,h')$, parallelamente a $(d\,f,\ d'\,f')$, e esta recta $(g\,h,\ g'\,h')$ incontrará, como foi dito, a recta $(c\,d, c'\,d')$ n'um ponto (h, h'), devendo por tanto os pontos h e h' estar sobre a mesma perpendicular a $L\ T$.

Não temos agora mais que procurar a verdadeira grandeza de $(g\,h,\ g'\,h')$, para o que não ha mais, como foi dito no problema I do capitulo II que tomar sobre a horizontal $g'\,g''$ a partir da recta $h\,h'$ um comprimento egual a $g\,h$, e unir h' e g''; a recta $h'\,g''$ é a verdadeira grandeza da mais curta distancia entra as rectas dadas $(c\,d_1,\ c'\,d_1')$ e $(a\,b,\ a'\,b')$.

Para resolver este mesmo problema poderiamos proceder de outro modo egualmente simples. Depois de ter determinao plano $a\,o\,b'$, fariamos passar por cada uma das rectas dadas um plano perpendicular a $a\,o\,b'$ e determinariamos a intercessão dos dois planos; ora o problema de fazer passar por uma recta um plano perpendicular a outro já foi resolvido, e reduz se sempre a tirar por qualquer ponto da recta uma outra recta perpendicular ao plano (tendo portanto as projecções respectivamente perpendiculares aos traços do plano), e o plano determinado pelas duas rectas (tendo portanto os seus traços passando pelos das duas rectas) é o plano pedido, visto que passa pela recta dada, e é perpendicular ao plano dado, por conter uma recta perpendicular a este plano.

Em todo o caso achamos conveniente habituar se o leitor a executar estes traçados que não lhe devem offerecer difficuldades.

Quando se trata de procurar a distancia constante entre duas rectas parallelas, o problema é muito simples; basta achar a mais curta distancia de um qualquer ponto de uma das rectas á outra recta.

Basta, por exemplo, para mais commodidade, achar a distancia de um dos traços de uma recta á outra; ora este problema de achar a mais curta distancia de um ponto a uma recta já nós resolvemos (Problema XIX).

Os problemas numerosos que resolvemos são sufficientes para nos habilitarem a resolver todas as questões de Geometria Descriptiva, em que só se tratar de rectas e de planos diversamente combinados.

Assim, se por exemplo nos fossem dadas as projecções dos vertices de um polyedro qualquer, se unissemos convenientemente essas projecções, duas a duas, teriamos as projecções das arestas, e em seguida estariamos habilitados a achar em verdadeira grandeza os comprimentos d'essas arestas, a determinar os angulos que cada uma fizesse com os planos de projecção, a determinar os angulos que as faces do polyedro fizessem com os mesmos planos de projecção, e entre si, a procurar a intercessão do polyedro com um plano dado, a fazer o rebatimento, sobre um dos planos de projecção, de qualquer face do polyedro, bem como muitos outros problemas de grande applicação e verdadeiramente uteis nas differentes artes.

CAPITULO III

DOS DIFFERENTES SYSTEMAS DE PROJECÇÕES

Projecções orthogonaes.—Em tudo quanto fica dito, supuzémos sempre a existencia de dois planos de projecção perpendiculares entre si, e que as projecções de cada ponto do espaço se faziam, sobre estes planos, por meio de rectas que passavam pelo ponto e lhes eram respectivamente perpendiculares. E' o systema de *projecções orthogonaes.*

Generalizando, podemos chamar projecção de um ponto sobre um plano o ponto em que uma recta qualquer, passando pelo ponto dado, incontra este plano.

E' certo que o systema de projecções orthogonaes é o mais geralmente usado,— em primeiro logar, porque é realmente muito simples, em segundo logar, porque offerece grande exactidão nos resultados graphicos.

Planos cotados. — Empregam-se comtudo, muitas vezes outros systemas de projecções; n'alguns, d'elles não se emprega senão um unico plano de projecção, e, entre estes ultimos, o mais simples e empregado é o que constitue os *planos cotados.* N'este systema, um ponto é determinado pela sua projecção orthogonal sobre um plano, que tem o nome de *plano de comparação* (e que, para simplicidade, se escolhe em geral, acima ou abaixo de todos os pontos do systema projectado), e por um *numero* escripto junto da projecção do ponto, e que faz conhecer a sua distancia ao plano de comparação; este numero chama-se a *cota do ponto.*

Se tomassemos o plano de comparação por modo que, entre os pontos do systema projectado, uns ficassem acima e outros abaixo do plano de comparação, sería forçoso considerar como positivas as cotas dos pontos que estivessem acima, por exemplo, e seriam negativas as dos pontos que estivessem abaixo do plano de comparação; é para evitar confusões desnecessarias, que, em geral, se prefere imaginar, como dissémos, o plano de comparação acima ou abaixo de todos os pontos do systema n'elle projectado.

Vê-se que realmente este systema de projecções entra n systema geral de projecções orthogonaes; pois, com effeito, poderiamos considerar o plano de comparação como um plano horizontal de projecção, traçar sobre elle uma linha-de-terra arbitraria e, pela projecção conhecida do ponto, abaixar uma perpendicular á linha de terra e prolongál-a para cima d'esta linha de uma quantidade egual á cota do ponto; o extremo d'esta perpendicular sería a projecção vertical do ponto no espaço; teriamos assim passado do systema dos planos cotados para o das projecções orthogonaes.

No systema dos planos cotados, uma recta é determinada pelas *cotas* e projecções de dois dos seus pontos, e um plano pela sua linha de maior declive, relativamente ao plano de comparação. Este systema de projecções é o geralmente empregado nos desenhos topographicos, em todos os trabalhos de aterro e desaterro, taes como estradas, caminhos-de-ferro, canaes, etc. Devemos comtudo notar que, sendo impossivel representar os corpos ou as extensões consideraveis de terreno, em tamanho natural sobre o papel, é forçoso recorrer a escalas, segundo as quaes se reduzem, na mesma proporção, todas as distancias horizontaes, sendo comtudo, em geral, as cotas, designadas em suas grandezas naturaes.

Ainda convem observar que, em muitos trabalhos, e principalmente nos trabalhos topographicos, este systema dos planos cotados soffre uma modificação. Percebe-se bem que, quando se trata de representar uma extensão de terreno mais ou menos accidentado, as simples projecções de muitos dos seus pontos sobre um plano de comparação, acompanhadas das cotas d'esses pontos, nenhuma ou muito pouca idéa dariam da fórma real do terreno; quanto mais se multiplicassem os pontos projectados e as suas cotas, maior sería a confusão, e ninguem, pela simples inspecção das projecções e das cotas, poderia fazer uma idéa rapida e nitida dos accidentes e disposições do terreno.

E' para evitar este inconveniente, que a Topographia modificou o systema dos planos cotados; para representar a disposição de um terreno considera ainda as projecções de muitos dos seus pontos sobre o plano de comparação, procura depois unir por uma linha contínua todos os pontos que tem a mesma cota, e obtem d'este modo uma serie de curvas chamadas *curvas de nivel*, e que, pela sua disposição e posições relativas, dão uma perfeita idéa do relevo do terreno.

Projecções obliquas.— Muitas vezes as linhas projectantes dos differentes pontos do espaço, em vez de serem perpendiculares respectivamente aos planos de projecção, são obliquas a estes planos, conservando-se comtudo parallelas entre si.

Para conhecer a projecção obliqua de um ponto do espaço, é preciso conhecer a direcção e inclinação da recta projectante, em relação ao plano de projecção. Na theoria das sombras, esta projecção obliqua é o que se chama a *sombra produzida* do ponto sobre o plano de projecção, que então toma o nome de plano *geometral*.

As projecções orthogonaes e obliquas teem o nome commum de *projecções cylindricas*.

Projecções cónicas. — Existe um outro systema de projecções a que se dá o nome de *projecções cónicas*, *centraes* ou *polares*, — emtanto que no systema de projecções cylindricas as projectantes são rectas sempre parallelas entre si; imbora perpendiculares ou obliquas ao plano de projecção, no systema de projecções cónicas as projectantes passam todas pelo mesmo ponto fixo, que se chama *pólo* ou *centro* das projecções. Quando projectemos cónicamente todos os pontos de um corpo, a projecção cónica obtida será a *sombra produzida* do corpo sobre o plano de projecção, se o ponto d'onde divergem as projectantes é um *ponto luminoso*, e será a *perspectiva*, se o ponto d'onde divergem as projectantes é o *olho de um observador*. Para haver sombra produzida, é necessario que o corpo illuminado esteja collocado entre o ponto luminoso e o plano de projecção.

Na theoria da perspectiva, o plano que recebe a projecção cónica suppõe-se em geral entre o corpo considerado e o olho do observador, mas poderia imaginar-se para além do corpo projectado cónicamente sobre o plano.

Podemos ainda notar que o systema de projecções cylindricas é um caso particular do systema de projecções cónicas, attendendo a que um cylindro se pode considerar como caso particular de um cóne cujo vertice está situado a uma distancia infinita.

FIM

INDICE

Typ. das Horas Romanticas — Rua da Atalaya, 40 a 52, Lisboa