PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brasileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

GEOMETRIA
E
TRIGONOMETRIA ESPHERICA

POR

Rodolpho Guimarães

29.ª serie

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada, — e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por maneira succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

CADA VOLUME 50 REIS

CADA VOLUME 50 REIS

LISBOA
"A EDITORA"
50, Largo do Conde Barão, 50

RIO DE JANEIRO
Rua do Ouvidor, 166

S. PAULO
Rua de S. Bento, 65

BELLO HORIZONTE
Rua da Bahia

1910

NUMERO
231

Geometria e trigonometria espherica

I

Noções de geometria espherica

1 — A *geometria espherica* estuda as figuras traçadas sobre a superficie de uma esphera.

Esphera é um volume limitado por uma superficie tendo todos os seus pontos egualmente distantes d'outro, denominado *centro*, por gozar da propriedade de dividir ao meio todas as rectas que, passando por elle, teem as suas extremidades sobre a superficie da esphera. Cada uma d'estas rectas tem o nome de *diametro*, e a metade do diametro, ou seja a distancia do centro a qualquer ponto da superficie espherica, denomina-se *raio*.

2 — A intersecção da esphera com um plano é um circulo, cujo centro está situado na perpendicular baixada do centro da esphera sobre o plano. De facto, as obliquas tiradas do centro da esphera para os pontos da linha de intersecção são eguaes entre si, por serem raios da mesma esphera, e por conseguinte desviam-se egualmente da perpendicular baixada do ponto de concurso d'ellas sobre o plano secante.

3 — Considerando um triangulo rectilineo rectangulo com os vertices: no centro da esphera, no do circulo e em qualquer ponto da circumferencia d'este, vê-se que o raio do circulo, por ser lado do angulo recto, é sempre menor que o raio da esphera, que é a hypotenusa. No caso, porém, do plano passar pelo centro da esphera, é evidente que o trian-

gulo rectilineo se reduz então a uma recta, que é o raio da esphera, donde se conclue que: 1.º as secções feitas na esphera por planos situados a egual distancia do centro, são circulos eguaes; 2.º de todos os circulos é o *maximo* aquelle cujo centro coincide com o da esphera.

Os circulos da esphera que não são concentricos com ella chamam-se *minimos* ou *menores*.

4 — Dois pontos da superficie espherica determinam uma circumferencia maxima, por isso que o plano d'esta é obrigado a passar pelo centro e por aquelles dois pontos. Se, porém, estes tres pontos estiverem em linha recta, isto é, se os dois pontos da superficie forem extremidades de um diametro, a posição do circulo maximo fica indeterminada.

A posição e grandeza dos circulos menores só ficam determinadas quando forem dados tres pontos da superficie da esphera.

5 — A intersecção de dois circulos é uma *linha recta*. Sendo maximos os dois circulos, a sua intersecção é um diametro commum á esphera e aos circulos, e portanto dois arcos de circulo maximo cortam-se em dois pontos.

6 — Supponhamos que differentes arcos de circulo maximo se cruzam no mesmo ponto de uma esphera, e conduzamos por este ponto commum tangentes aos mesmos arcos. Todas ellas são perpendiculares ao raio tirado para o ponto de contacto, e visto elle ser o mesmo para todas, segue-se que ellas existem em um unico plano, que é normal ao raio considerado. Tal plano denomina-se *plano tangente* á esphera, no ponto em que os arcos se interceptam.

7 — Chama-se *eixo de um circulo* da esphera, a recta passando pelo centro do circulo e perpendicular ao seu plano, e os dois pontos em que o eixo encontra a superficie da esphera, teem o nome de *polos*.

O eixo de um circulo é, portanto, o logar geometrico de todos os pontos do espaço equidistantes dos diversos pontos da sua circumferencia. Considerando *dois* pontos de um eixo, claro está que as suas distancias a qualquer outro da circumferencia sómente serão eguaes quando aquellas forem equidistantes do centro do circulo. Resulta, pois, que: 1.º em qualquer circulo menor as distancias de um ponto da circumferencia aos seus polos são deseguaes, e eguaes as distancias de um polo aos diversos pontos da mesma curva; 2.º em um circulo maximo a distancia de cada ponto da circumferencia a qualquer dos polos é constante, e egual á corda do arco de 90°.

Um ponto da esphera considerado como polo, determina um circulo maximo e nunca um circulo menor.

8 — O maior ou menor desvio de dois arcos de circulo maximo, passando por um ponto da esphera a que pertencem, tem o nome de *angulo espherico.*

Dois angulos esphericos são eguaes quando se pode ajustar perfeitamente os dois lados de um sobre os dois lados do outro, o que equivale a suppôr: 1.° que os angulos estão situados sobre a mesma esphera, ou sobre espheras eguaes; 2.° que são eguaes os angulos diedros formados pelos planos dos referidos lados.

Os circulos maximos pertencentes a espheras diversas teem raios differentes e portanto não podem sobrepôr-se, e quando as circumferencias se confundem tambem os seus planos coincidem.

9 — Dividindo em partes eguaes um angulo diedro correspondente a um angulo espherico qualquer, e conduzindo planos por essas divisões, ficará o angulo espherico dividido no mesmo numero de partes, tambem eguaes entre si.

10 — Visto o angulo formado por duas tangentes aos lados de um angulo espherico, no ponto em que ellas se encontram, medir o angulo dos dois planos dos circulos maximos, é evidente que tambem poderá medir o angulo espherico. Este tambem pode ser expresso pelo angulo plano formado por dois raios da esphera, respectivamente parallelos áquellas tangentes, ou pelo arco de circulo maximo por ellas interceptado. E como a distancia do extremo de cada um d'estes raios ao vertice do angulo espherico, é egual a 90.°, segue-se que o arco do circulo maximo comprehendido entre os lados de um angulo espherico tendo o polo no vertice d'este, é egual ao mesmo angulo espherico.

Por esta equivalencia se vê que, em geral, são extensivas aos angulos esphericos as propriedades dos angulos planos. Assim, se um arco de circulo maximo intercepta outro, forma dois angulos supplementares, e estes são eguaes, cada um vale 90°, e os arcos são perpendiculares entre si; os angulos esphericos verticalmente oppostos são eguaes, etc.

11 — Denomina-se *polygono espherico* a figura formada sobre

a superficie espherica por diversos arcos de circulo maximo, cortando-se entre si dois a dois.

O polygono toma nomes particulares conforme o numero dos lados ou dos angulos que o constituem. No caso de dois arcos de circulo maximo apenas, fechando espaço sobre a superficie da esphera, resulta a *lunula* ou *fuso espherico,* que é limitado por dois lados, cada um de 180°, formando dois angulos eguaes entre si.

12 — Tirando raios do centro da esphera para cada um dos vertices do polygono, e fazendo passar por cada dois raios consecutivos um plano, resulta um *angulo polyedrico* com o vertice no centro da esphera, o qual gosa da propriedade dos lados do polygono serem eguaes aos angulos planos do angulo polyedrico, e os angulos diedros d'este eguaes aos angulos esphericos d'aquelle.

As propriedades relativas aos angulos planos e diedros de um angulo solido podem, pois, converter-se em outras analogas entre os lados e angulos de um polygono espherico e vice-versa. Assim, por exemplo, sabendo-se que nos angulos polyedros convexos (em que não ha angulos diedros reintrantes, ou superiores a 180°) a somma dos angulos planos é menor que 360°, pode-se concluir que nos polygonos esphericos, onde qualquer angulo é inferior a 180°, a somma dos lados é menor que 360°.

13 — Em um triangulo espherico não pode haver um angulo egual a 180° sem que o triangulo degenere em lunula ou fuso espherico, por isso que prolongado cada um dos outros lados irá passar pelos dois extremos do primeiro. Tambem se não póde admittir que um triangulo possa ter dois lados superiores a 180°, porque então taes lados cruzar-se-iam, antes de encontrar o terceiro e a figura compor-se-ia, n'esse caso, de uma lunula e de um triangulo unidos por um vertice commum aos dois angulos verticalmente oppostos. Pode, todavia, succeder que haja um unico lado maior que 180°, donde resulta não ficar determinado triangulo quando forem dados os vertices, ou tres pontos quaesquer sobre a superficie de uma esphera. Com effeito, sejam (Fig. 1) A, B, C os pontos dados. Podemos sempre construir o triangulo em que os lados A B, B C, e A D C são inferiores a 180°, o que só deixará de ser possivel quando algum d'elles fôr egual a 180°. Ora, além do triangulo considerado, podemos

construir com os mesmos vertices outros tres triangulos, cada um dos quaes será formado por dois lados do triangulo primitivo.

N'este caso está o triangulo definido pelos arcos A B, B C, C E A. E' evidente que d'estes dois triangulos A B C D A, A B C E A, um ha-de ter forçosamente um lado maior que

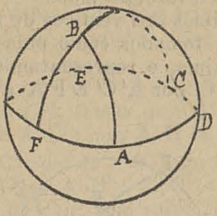

Fig. 1

180° ; comtudo basta conhecer os elementos de um para determinar os do outro. Effectivamente deduz-se da Fig. 1.

$$A\hat{D}C + C\hat{E}A = 360^\circ$$
$$B\hat{A}D + B\hat{A}F = 180^\circ$$
$$B\hat{C}D + B\hat{C}E = 180^\circ$$

E sendo estas relações sufficientes para calcular os lados e angulos de um d'aquelles triangulos, quando são conhecidos os lados e os angulos do outro, segue-se que podemos considerar sómente um dos triangulos, que tem os mesmos vertices, excluindo da definição geral (n.° 11) os que comprehendem um lado inferior a 180°.

14 — A Fig. 1 mostra ainda que no triangulo A B C D é $D\hat{A}B < 180^\circ$, $D\hat{C}B < 180.^\circ$, $A\hat{B}C < 180^\circ$, porém $A\hat{B}C + ABF = 180^\circ$, ao passo que no outro triangulo A B C E é $A\hat{B}C = ABF + 180^\circ$, ou seja $> 180^\circ$. Portanto, nos triangulos esphericos, suppondo qualquer lado menor que 180°, não pode haver nenhum angulo superior a 180°.

Não podendo um triangulo espherico ter angulo algum reintrante, ou maior que 180°, conclue-se que (n.° 12) a somma dos lados é menor que 360°.

As relações existentes (n.° 12) entre os elementos de um triangulo espherico e as do angulo diedro correspondente, levam-nos a admittir ainda como verdadeira a seguinte proposição: a somma de dois lados quaesquer do triangulo espherico é maior que o terceiro lado.

15 — Se descrevermos dos vertices de um triangulo espherico A B C (Fig. 2), tomados como polos, tres circumferencias de circulo maximo, e representando por A′ B′ E D A a que tem o polo em C, por A′ C′ E F A′ a que tem o polo em

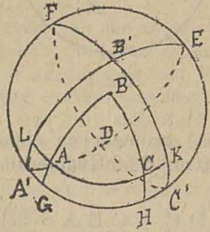

Fig 2

B, e finalmente por F B′ C′ D F a que tem o polo em A, obteremos sobre a esphera oito triangulos (n.° 13), A′ B′ C′, B′ C′ E, E B′ F, F B′ A′, situados em um hemispherio, e D F A′, A′DC′, C′ D E traçados no outro, e com os vertices diametralmente oppostos aos dos triangulos do primeiro grupo.

Considerando em especial o triangulo A′ B′ C′, vê-se que A′, por exemplo, é polo de B C, pois que A′ B e A′ C são arcos de 90°, por serem B e C polos de A′ C′ e A′ B′, e visto os pontos A′ e E estarem nos extremos de um diametro (n.° 5) segue-se que os polos de B C são A e E.

De identico modo se conclue que C′ e F são polos de A B, e B′ e D polos de A C. Como consequencia; temos, pois, que os vertices dos oito triangulos traçados, tendo os polos em A, B, C, são polos do triangulo A B C. Prolongando estes lados até completarem tres circumferencias maximas obteremos mais sete triangulos esphericos, que estarão para A′ B′ C′ como este para A B C.

Facilmente se reconhece que tomando dois triangulos esphericos quaesquer, um constituido pelas circumferencias maximas determinadas pelos lados do triangulo A B C, e outro pelas que correspondem aos lados de A′ B′ C′, temos sempre que os vertices de um são polos dos lados do outro. A propriedade que caracterisa dois triangulos assim constituidos explica a razão porque a elles se deu o nome de *triangulos polares*.

16 — Prolongando os arcos A B e B C até encontrarem A′ C′ nos pontos G e H, temos que $\hat{B} = \widehat{GH}$ pelo facto do ponto B ser polo de A′ C′; mas $A'H = C'G = 90°$, visto A′ ser polo de B C e C′ polo de A B, logo $\hat{B} = A'H - A'G = A'H - (A'C - C'G) = A'H + C'G - A'C' = 180° - b'$.

Identicamente se obteem, com respeito aos outros vertices do triangulo A B C, as equações

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + a' = 180° \\ \hat{B} + b' = 180° \\ \hat{C} + c' = 180° \end{array}\right\} \cdots\cdots (1)$$

Prolongando A C até encontrar A′ B′ e B′ C′, resulta $\hat{B}' = \widehat{LK}$, por ser B′ polo de A C, $LC = AK = 90°$. Donde

$$\hat{B}' = LC + CK = LC + (AK - AC) = 180° - b$$

Por maneira analoga se deduzem as equações

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + a = 180° \\ \hat{B} + b = 180° \\ \hat{C} + c = 180° \end{array}\right\} \cdots\cdots (2)$$

Estas relações (1) e (2) existentes entre os lados e angulos dos triangulos A B C e A′ B′ C′, e que tambem teem logar entre os elementos do triangulo A B C e os de E D F, deixam de se verificar quando se comparam os lados e angulos do triangulo A B C com os de qualquer dos outros triangulos polares. Assim, em $E B' C'$, é $B' = 180^\circ - A' \hat{B}' C' = 180^\circ - (180^\circ - b) = b$; $E = B' \hat{A}' C' = 180^\circ - a$; $D' = 180^\circ - A' \hat{C}' B' = 180^\circ - (180^\circ - d) = d$; $B' E = 180^\circ - (180^\circ - C) = C$; $C' E = 180^\circ - (180^\circ - B) = B$.

Analogamente se reconhece que no triangulo $E B' F$ se tem:

$B' = 180^\circ - b$, $E = a$, $F = d$, $E F = 180^\circ - B$, $B' F = A$, $B' E = D$; e no triangulo $A' B' F$: $B' = b$, $F = 180^\circ - d$, $A' = a$, $A' F = B$, $A' B' = 180^\circ - C$, $B' F = A$.

Nos quatro triangulos restantes obteem-se as mesmas relações, para o que basta observar que elles estão respectivamente situados em posições symetricas a respeito dos outros.

Ha, pois, a distinguir entre os diversos triangulos, reciprocamente polares, dois (considerando em cada grupo só os que estão sobre um hemispherio) entre os quaes se dá a propriedade singular de serem os angulos de um respectivamente supplementares dos lados do outro, e inversamente. Taes triangulos teem o nome de *triangulos supplementares*.

Rigorosamente fallando, o triangulo A B C é supplementar de $A' B' C'$ e de E D F, e estes dois ultimos são tambem supplementares do triangulo A B C e do collocado em posição symetrica de A B C, isto é, do que tivesse os vertices diametralmente oppostos aos d'este; considerando porém apenas um hemispherio, cada triangulo A B C tem só um triangulo supplementar, que é $A' B' C'$.

17 — *A somma dos tres angulos de um triangulo é maior que dois angulos rectos e menor que seis.*

Tomando, effectivamente, dois triangulos supplementares A B C e $A' B' C'$ (Fig. 2), vimos (n.º 16) que

$$\left.\begin{aligned} A + a' &= 180^\circ \\ B + b' &= 180^\circ \\ C + c' &= 180^\circ \end{aligned}\right\}$$

Donde

$$A + B + C = 6 \times 90^\circ - (a' + b' + c') \ldots\ldots (3)$$

mas vimos tambem (n.° 14) que

$$a' + b' + c' < 4 \times 90^\circ$$

ou

$$a' + b' + c' = 4 \times 90^\circ - 2\,\varepsilon$$

sendo $2\,\varepsilon$ uma quantidade comprehendida entre 0^0 e 4×90^0. Logo, substituindo em (3), vem

$$A + B + C = 2 \times 90^\circ + 2\,\varepsilon$$

isto é, a somma dos tres angulos é maior que dois angulos rectos, por ser $\varepsilon > o$, e é menor que seis rectos, por ser $2\,\varepsilon < 4 \times 90^\circ$.

Nos triangulos esphericos a quantidade

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ \ldots \;\ldots \quad (4)$$

é sempre positiva e chama-se *excesso espherico*. E' maior que 0 e menor que 360°.

18 — *Em qualquer triangulo espherico a lados eguaes oppõem-se angulos eguaes, e vice-versa.*

Sejam (Fig. 3) A C e B C dois lados eguaes do triangulo

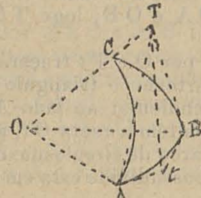

Fig. 3

espherico A B C, e supponhamos, por emquanto, que esses lados são menores que 90°. Tiremos os raios O A, O B e O C da esphera e as tangentes A t e A T, bem como B t e B T.

As tangentes A T e B T interceptam o prolongamento do raio O C no ponto T, por serem eguaes os triangulos rectilineos rectangulos A O T e B O T, onde A O = B O e $A\hat{O}C = B\hat{O}C$.

Da egualdade dos mesmos triangulos rectangulos se deduz A T = B T e por ser tambem A t = B t e T t um lado commum aos triangulos rectilineos A T t e B T t, segue-se que são eguaes estes triangulos e portanto eguaes tambem os angulos planos T A t e T B t, correspondentes aos angulos esphericos A e B.

A reciproca demonstra-se substituindo ao triangulo espherico o seu supplementar, e applicando a este a primeira parte do theorema.

No caso dos dois lados A C e B C serem maiores que 90°, pode-se substituir cada um d'elles pelo seu supplemento, obtendo-se então um novo triangulo A' B' C onde A' C e B' C são eguaes e menores que 90°, e por conseguinte $C\hat{A}'B' = C\hat{B}A$, ou (n.° 10)

$$180^\circ - C\hat{A}B = 180^\circ - C\hat{B}A \text{ e } C\hat{A}B = C\hat{B}A$$

19 — O plano A O B (Fig. 3) é perpendicular aos planos T A t e T B t, visto conterem duas rectas perpendiculares respectivamente a O A e O B; logo T b é normal ao plano A O B.

O plano conduzido por O e T t traçará, pois, na superficie da esphera a que pertence o triangulo A B O, um arco de circulo maximo perpendicular ao lado A B e passando por C, e como tal plano contém a recta O t, segue-se que em um triangulo isosceles o arco de circulo maximo, baixado do vertice, normalmente á base, divide esta em duas partes eguaes, e vice-versa.

20 — *Em qualquer triangulo espherico ao angulo maior oppõe-se lado maior, e reciprocamente.*

Supponhamos que no triangulo A B C (Fig. 4), é B A C > B C A, e tomemos no angulo B A C uma parte B A D egual a B C A.

Será (n.º 18) $CD = \overset{\frown}{AD}$ e como é (n.º 14) $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DA} > \overset{\frown}{AB}$, resulta que

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} \text{ ou } \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB}$$

Inversamente, visto $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB}$ será $B\hat{A}C > B\hat{C}A$, porque sendo estes angulos eguaes ter-se-ha (n.º 18) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB}$, e não o sendo não se pode ter $B\hat{A}C < B\hat{C}A$ sem que $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB}$, o que é contrario á hypothese.

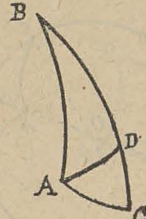

Fig. 4

21 — Os triangulos A B C e A′ B′ C′ (Fig. 5) traçados na hypothese dos vertices de um serem diametralmente oppostos aos do outro, ficam symetricamente dispostos em relação ao centro da esphera, tomado como centro de symetria. N'estes triangulos os lados A B, B C e A C são respectivamente eguaes a A′ B′, B′ C′ e A′ C′, sendo tambem facil de demonstrar que os angulos A e A′ são eguaes, bem como B e B′ e C e C′.

E', entretanto, impossivel sobrepôr um d'estes triangulos ao outro, por isso que fazendo deslocar o triangulo A′ B′ C′ sobre a superficie da esphera, por forma que B′ vá coincidir com B e A′ com A, o ponto C′ occupará a posição C″ situada, a respeito do plano O A B, do lado opposto a C.

Por analogo raciocinio se demonstra que se o angulo A′ C′ B′ tivesse o lado C′ A′ para a parte anterior do circulo B C B′ C′, e não para a posterior, o novo triangulo teria ainda os elementos (lados e angulos) respectivamente eguaes aos de A B C, podendo ajustar sobre elle, mas então os triangulos não se achariam em posição symetrica.

Pode, todavia, succeder que os dois triangulos possam sobrepôr-se não obstante estarem collocados em posição symetrica. Assim, se fosse A C = B C e portanto A′ C′ = B′ C′ poderiamos assentar A′ sobre B e B′ sobre A, de modo que C′ cahisse sobre C e n'esse caso os triangulos coincidiriam.

Logo, em geral, os triangulos que teem possibilidade de se disporem em posição symetrica, teem os elementos de um

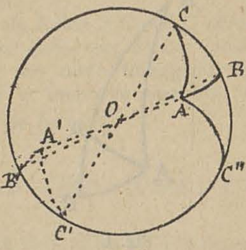

Fig. 5

respectivamente eguaes aos do outro, mas não são sobreponiveis, visto os lados e angulos do primeiro não estarem similhantemente dispostos a respeito dos lados e angulos do segundo.

Os triangulos que podem collocar-se em posição symetrica, em relação ao centro da esphera, dizem-se *triangulos symetricos.*

22 — *Dois triangulos esphericos são eguaes quando, traçados sobre a mesma esphera, se podem ajustar perfeitamente.*

Isto dá-se : 1.º *Quando dois lados de um são perfeitamente eguaes e semelhantemente dispostos a dois lados do outro, e eguaes os angulos comprehendidos por esses lados.*

Demonstra-se por sobreposição, tal como o caso correspondente dos triangulos rectilineos, accrescentando-se, todavia, aqui a condição *semelhantemente dispostos*, pois sem ella os triangulos seriam symetricos, e por consequencia (n.º 21) não poderiam, em geral sobrepor-se. Na geometria plana não se torna preciso que os elementos estejam semelhantemente dispostos: porque então as figuras symetricas são eguaes, isto é, susceptiveis de sobreposição.

2.º *Quando os tres lados de um são respectivamente eguaes e semelhantemente dispostos aos tres lados do outro.*

Sejam (Fig. 6) A B C e A′ B′ C′ os triangulos dados, onde $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Se fosse $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$, os dois triangulos seriam eguaes; mas suppondo que aquelles angulos são differentes, ou que $B\hat{A}C > B'\hat{A}'C'$,

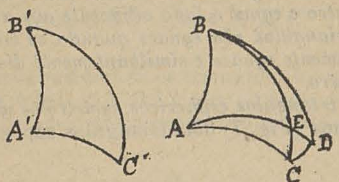

Fig. 6

e que no maior angulo tomamos uma parte B A D egual a B′ A′ C′ e o arco $AD = A'C'$, será

$$\text{triang. } ABD = \text{triang. } A'B'C'$$

e o ponto D não poderá cahir sobre o lado B C porque visto $BD = B'C'$, segue-se que $BE = BC$, o que é absurdo.

D'esta construcção se tira

$$AD = A'C' = AC \qquad BD = B'C' = BC$$

logo no triangulo A C D é (n.º 20) $A\hat{C}D = C\hat{D}A$ e no triangulo B C D, é pelo mesmo motivo $B\hat{C}D = C\hat{D}B$; mas ficando o ponto D fora do triangulo A B C é $B \hat{C} D < A \hat{C} D$, $C \hat{D} B > C \hat{D} A$, o que é absurdo.

Se, porém, o ponto D cahisse dentro do triangulo, o resultado seria egualmente absurdo, e tal succederia sempre desde que D não coincidisse com C.

23 — Vimos no n.º 16 que se considerarmos um só hemispherio, cada triangulo tem unicamente um supplementar, e por conseguinte se dois triangulos esphericos forem eguaes, não se torna possivel sobrepol-os sem que os seus supplementares ajustem completamente. Logo: *são eguaes os triangulos supplementares de triangulos esphericos eguaes.*

24 — Substituindo os triangulos considerados no n.º 22 pelos seus supplementares, concluimos em vista do deduzido no n.º 23, que:

1.º *Dois triangulos são eguaes quando dois angulos de um são respectivamente eguaes e similhantemente dispostos a dois angulos do outro e egual o lado adjacente aos angulos.*

2.º *Dois triangulos são eguaes quando os tres lados de um são respectivamente eguaes e similhantemente dispostos aos tres angulos do outro.*

25 — *Dois triangulos esphericos symetricos são equivalentes.*

Consideremos (Fig. 7) dois triangulos esphericos symetri-

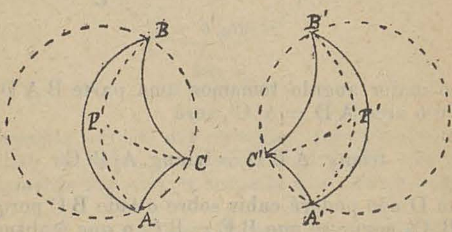

Fig. 7

cos A B C e A′ B′ C′, pertencentes á mesma esphera ou a espheras eguaes. Fazendo passar um plano pelos vertices de cada triangulo obteremos sobre a esphera dois circulos menores de raios eguaes, por serem circumscriptos aos triangulos rectilineos eguaes A B C, A' B' C', constituidos pelas cordas dos lados dos triangulos esphericos.

Designando P e P' os polos mais proximos dos circulos A C B A, A' C' B' A', teremos que serão eguaes (n.º 7) as rectas P A, P B, P C, P' A', P' B' e P' C', e portanto tambem são eguaes os arcos de circulo maximo que ellas subtendem. Resulta, pois, que os triangulos P A B, P B C, P A C são isosceles e respectivamente symetricos de P' B' A', P' B' C', P' A' C', e como estes triangulos isosceles são eguaes (n.º 21) tambem o serão as suas areas. Logo

$$\text{area } P B A + \text{area } P B C + \text{area } P A C =$$
$$= \text{area } P' B' A' + \text{area } P' B' C' + \text{area } P' A' C'$$

ou

$$\text{area } A B C = \text{area } A' B' C'$$

Se tivessemos considerado os triangulos isosceles formados pelos lados de A B C e A' B' C' com os arcos passando pelos polos mais afastados, seria preciso subtrahir da area da es-

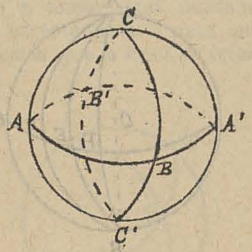

Fig. 8

phera as dos triangulos P A B, P B C, P A C e P' A' B', P' B' C' e P' A' C'.

Quanto ás areas de A B C e A' B' C' obteem-se por modo identico ao anterior.

26 — *A somma das areas das triangulos* A B C *e* A′ B′ C′, *formados pelos arcos* A C A′ *e* B C B′ *terminando no mesmo circulo* A B A′ B′, *é egual á area da lunula cujo angulo é egual a cada um dos verticalmente oppostos dos triangulos.*

A figura dá (Fig. 8).

$$B' C = 180^\circ - B C = B C'$$
$$A' C = 180^\circ - A C = A C'$$
$$A' B = A B$$

relações donde se deduz (n.os 21 e 25)

$$\text{area } A' B' C = \text{area } A B C'$$
$$\text{area } A' B' C + \text{area } A B C = \text{area } A C B C' A$$

27 — *A area da lunula ou fuso espherico está para a da esphera a que pertence, assim como o numero de graus do angulo está para 360°.*

Dividindo em partes eguaes a circumferencia C D E F (Fig. 9), perpendicular á recta A B que une os dois vertices

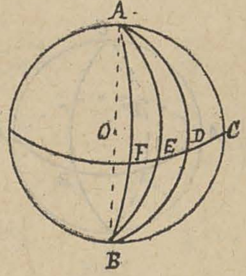

Fig. 9

da lunula, e tirando por estes e por cada ponto de divisão arcos de circulo maximo, resulta um certo numero de lunulas, todas eguaes, por isso que se podem sobrepôr.

Sendo n o numero de partes em que toda a circumferencia é dividida, e designando por: S a area da esphera, L a da lunula, e A^o o angulo que lhe corresponde, ter-se-ha

$$S = n\,L \qquad 360^o = n\,A^o$$

donde

$$\frac{L}{S} = \frac{A^o}{360^o}$$

proporcionalidade que se verifica tambem quando o arco C F, correspondente á lunula, e a circumferencia forem incommensuraveis.

28 — *A area da lunula tem por valor numerico o dobro do angulo, se se designar por* 8 *a area da esphera, e por unidade o angulo recto.*

Assim, adoptando estas convenções, teremos

$$\frac{L}{8} = \frac{\hat{A}}{4}$$

donde

$$L = 2\,\hat{A}$$

29 — Continuando a tomar para unidade de area a do triangulo espherico trirectangulo, e para unidade de angulo o angulo recto, teremos que *a area do triangulo espherico é*

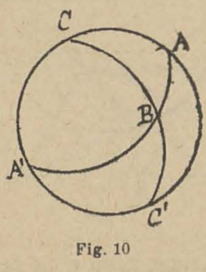

Fig. 10

egual ao excesso espherico, isto é ao excesso da somma dos tres angulos sobre dois rectos. Com effeito, prolongando os tres lados do triangulo A B C (Fig. 10), temos em um hemispherio (n.º 28).

$$4\,r = 2\,\hat{A} + (2\,\hat{C} - \text{arco } A\,B\,C) + \text{area } A'\,B'\,A'$$

mas (n.º 26)

$$A'\,B'\,C' = 2\,\hat{B} - 2 \text{ arco } A\,B\,C$$

logo

$$4\,r = 2\,\hat{A} + 2\,\hat{B} - \text{area } A\,B\,C + 2\,\hat{C}$$

ou

$$\text{area } A\,B\,C = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 2\,r$$

que é a formula (4).

II

Elementos de trigonometria espherica

30 — A *trigonometria espherica* tem por objecto a resolução dos triangulos esphericos.

Se na resolução de um triangulo um dos elementos dados fôr *angulo*, e sendo este, A por exemplo, egual a 90°, o triangulo diz-se *rectangulo;* qualquer outro triangulo é chamado *obliquango*.

Se, porém, um dos elementos dados fôr *lado* e valer 90°, o triangulo diz-se *rectilatero*.

CAPITULO I

Relação entre os elementos de um triangulo espherico

A). RELAÇÕES ENTRE QUATRO ELEMENTOS, OU RELAÇÕES FUNDAMENTAES

31 — *Relações entre os tres lados e um angulo* — Seja A B C (Fig. 11), um triangulo espherico, cujos lados A B e A C suppomos ser menores que 90°.

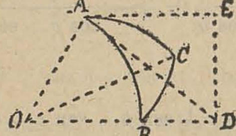

Fig. 11

Unamos os vertices A, B, C ao centro O da esphera; tiremos em seguida, nos planos A O B e A O C, as perpendiculares A D e A E a O A até encontrarem o prolongamento dos raios O B e O C.

Ora, os triangulos rectilineos O D E e A D E, dão

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\,OD\,.\,OE\,.\cos DOE$$
$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\,AD\,.\,AE\,.\cos DAE$$

donde

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 - 2\,OD\,.\,OE \cos DOE$$
$$+ 2\,AD\,.\,AE \cos DAE = 0$$

Mas

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 = 1 \;,\; \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{OA}^2 = 1$$

$$OD = \sec.\,c = \frac{1}{\cos c} \;,\; OE = \sec.\,b = \frac{1}{\cos b}$$

$$AD = \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} \;,\; AE = \operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$$

$$DOE = a \;,\; DAE = A$$

Logo

$$2 - \frac{2\cos a}{\cos c\,.\,\cos b} + \frac{2\operatorname{sen} c\,.\,\operatorname{sen} b\,.\,\cos A}{\cos c\,.\,\cos b} = 0$$

ou

$$\cos a = \cos b\,.\,\cos c + \operatorname{sen} b\,.\,\operatorname{sen} c\,.\,\cos A\,\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Tal é a *formula fundamental* da trigonometria espherica. Esta formula foi deduzida na hypothese de que os lados b e c eram menores que 90°. Ella é, porém, geral, como vamos vêr.

Para isso, demonstremos primeiramente que a formula subsiste quando um dos lados b, a, c, fôr maior que 90° ou $^1/_2\,\pi$.

Com effeito, se, por exemplo, o lado c fôr maior que $\frac{1}{2}\pi$, a formula (5) applicada ao triangulo complementar A B′ C, onde os lados A B′ e A C são menores que $\frac{1}{2}\pi$, dá

$$\cos(\pi - a) = \cos b \,.\, \cos(\pi - c)$$
$$+ \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen}(\pi - c)\cos(\pi - A)$$

ou

$$-\cos a = -\cos b \,.\, \cos c - \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

ou finalmente

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

Passemos agora a demonstrar que a formula (5) subsiste ainda quando ambos os lados b e c são maiores que $\frac{1}{2}\pi$.

De facto aquella expressão applicada ao triangulo complementar A′ B C, na qual os lados A′ B e A′ C são menores que $\frac{1}{2}\pi$, dá

$$\cos a = \cos(\pi - b) \,.\, \cos(\pi - c)$$
$$+ (\operatorname{sen} \pi - b) \,.\, \operatorname{sen}(\pi - c) \,.\, \cos A$$

ou

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

Sendo, pois, a formula (5) verdadeira para os valores de b e c tão proximos quanto se queira de $\frac{1}{2}\pi$, é verdadeira ainda quando um d'estes lados, ou ambos, forem eguaes a $\frac{1}{2}\pi$. Ella é, pois, geral.

Por permutação circular a expressão (5) origina as seguintes

$$\cos b = \cos c \,.\, \cos a + \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos B \ldots \quad (6)$$
$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \cos C \ldots \quad (7)$$

32 — *Relação entre dois lados e os angulos oppostos. Em qualquer triangulo espherico teem logar as relações*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \ldots\ldots \quad (8)$$

pelas quaes se vê que *os senos dos angulos são proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.*

Effectivamente, da formula (5) tira-se

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

e portanto

$$1 - \cos^2 A = \operatorname{sen}^2 A =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \,.\, \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c}$$

ou

$$\operatorname{sen}^2 A =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c}$$

e por conseguinte

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \,.\, \operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c}$$

e visto o segundo membro ser symetrico em relação a a, b, c, segue-se que

$$\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 a} = \frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 b} = \frac{\text{sen}^2 C}{\text{sen}^2 c}$$

ou

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$$

como se pretendia demonstrar.

33 — *Relação entre dois lados, o angulo comprehendido e o angulo opposto a um d'elles, isto é entre os quatro elementos consecutivos.*

Para obter uma relação entre a, b, C, A, substituamos na equação (5), cos c pelo seu valor tirado da equação (7) o que dá

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \,.\, \cos b + \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \cos C)$$
$$+ \text{sen } b \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos A\,,$$

donde

$$\cos a \,.\, \text{sen}^2 b = \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \cos b \,.\, \cos C$$
$$+ \text{sen } b \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos A$$

ou, supprimindo o factor sen b, commum a todos os termos, dividindo estes por sen a, e substituindo $\frac{\text{sen } c}{\text{sen } a}$ por $\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$, resulta

$$\text{cotang } a \,.\, \text{sen } b = \cos b \,.\, \cos C + \text{sen } B \,.\, \text{cotang } A \quad \ldots\ (9)$$

Mudando n'esta equação b em c e C em B, teem-se

$$\text{cotang } a \,.\, \text{sen } c = \cos c \,.\, \cos B = \text{sen } B \,.\, \text{cotang } A \quad \ldots\ (10)$$

Finalmente, as equações (9) e (10) dão, por permutações circulares, as seguintes

$$\left.\begin{array}{l} \text{cotang}\, b\,.\,\text{sen}\, c = \cos c\,.\,\cos A + \text{sen}\, A\,.\,\text{cotang}\, B \\ \text{cotang}\, b\,.\,\text{sen}\, a = \cos a\,.\,\cos C + \text{sen}\, C\,.\,\text{cotang}\, B \\ \text{cotang}\, c\,.\,\text{sen}\, a = \cos a\,.\,\cos B + \text{sen}\, B\,.\,\text{cotang}\, C \\ \text{cotang}\, c\,.\,\text{sen}\, b = \cos b\,.\,\cos A + \text{sen}\, A\,.\,\text{cotang}\, C \end{array}\right\} \dots \quad (11)$$

34 — *Relação entre um lado e tres angulos.* Applicando a formula fundamental ao triangulo supplementar de A B C, resulta

$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B)\,.\,\cos(\pi - C)$$
$$+ \text{sen}(\pi - B)\,.\,\text{sen}(\pi - C)\,.\,\cos(\pi - a$$

ou

$$\cos A = -\cos B\,.\,\cos C + \text{sen}\, B\,.\,\text{sen}\, C\,.\,\cos a \dots \quad (12)$$

Por permutação circular n'esta equação se obteem as seguintes:

$$\left.\begin{array}{l} \cos B = -\cos C\,.\,\cos A + \text{sen}\, C\,.\,\text{sen}\, A\,.\,\cos b \\ \cos C = -\cos A\,.\,\cos B + \text{sen}\, A\,.\,\text{sen}\, B\,.\,\cos a \end{array}\right\} \dots \quad (13)$$

B). RELAÇÕES ENTRE CINCO ELEMENTOS, GERALMENTE CHAMADAS ANALOGIAS DE NAPIER

35 — *Em qualquer triangulo espherico teem logar as seguintes relações:*

1.º

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A + B)}{\text{cotang}\,\frac{1}{2}\,C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}(a + b)}$$

e

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b)} \quad \ldots (A)$$

2.º

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B)} \quad \ldots (B)$$

Para deduzir estas formulas, preciso se torna proceder primeiramente ao calculo de $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$ e $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ em funcção dos tres lados.

Ora, da relação fundamental (5), tira-se

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

donde

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{(\cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, c) - \cos a}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a - b + c}{2} \,.\, \operatorname{sen} \frac{b - c + a}{2}}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

ou

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p - b) \,.\, \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

donde

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b) \,.\, (p - c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} \quad (14)$$

Por um calculo analogo se deduz

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} c}$$

donde

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} c}}. \quad (15)$$

e portanto

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b) \,.\, \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p - a)}}. \quad (16)$$

Os radicaes devem ser tomados positivamente, porque sendo o angulo A inferior a 180°, o angulo $\frac{1}{2}$ A é menor que 90°, e todas as funcções trigonometricas do primeiro quadrante são positivas (1).

---

(1) A este mesmo calculo é applicavel a funcção trigonometrica intitulada *semi-seno-verso* do arco, que é o seno quadrado da metade d'esse arco (*Halfversine* ou abreviadamente *hav*) cuja utilidade tem sido desprezada pela maioria dos autores de tratados de trigonometria, apezar d'ella simplificar consideravelmente a resolução dos triangulos, quer rectilineos, quer esphericos. Esta funcção é definida pela seguinte expressão

$$\operatorname{hav} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen\text{-}vers} x = \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x$$

36 — Posto isto, e attendendo á equação (16), e á que d'ella se obtem por permutação

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c)\,.\,\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p\,.\,\operatorname{sen}(p-b)}}$$

resulta

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p}$$

Mas

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}$$

e multiplicando por $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}C}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p}+\frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p}}{1-\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}(p-c)}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (2p - a - b) \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} (2p - c)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} (a + b)}$$

ou seja

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)}$$

Analogamente

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}$$

e multiplicando por $\operatorname{tang} \frac{1}{2} C$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} C =$$

$$= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} C - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p} - \dfrac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(p-b) - \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen}(p-c)}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2}(2p-a-b)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2p-c) \cdot \cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2} c}$$

ou seja

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+a)}$$

A primeira das relações (A) mostra que $\frac{A+B}{2}$ e $\frac{a+b}{2}$ são da mesma natureza; a segunda prova que o mesmo succede a $\frac{1}{2}(A+B)$ e $\frac{1}{2}(a-b)$, visto ser sempre positiva a funcção $\operatorname{cotang} \frac{1}{2} C$.

37 — Pelo que respeita ás relações (B), tratamos de obter primeiramente $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} a$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$, em funcção dos tres angulos.

Ora, da equação (12), tira-se

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \;.\; \cos C}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

e por conseguinte

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \;.\; \cos C}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C - \cos A - \cos B \;.\; \cos C}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= - \frac{\cos A + \cos (B + C)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= - \frac{2 \cos \frac{A + B + C}{2} \;.\; \cos \frac{B + C - A}{2}}{\operatorname{sen} A \;.\; \operatorname{sen} C}$$

ou

$$\frac{1 - \cos a}{2} = - \frac{\operatorname{sen} \varepsilon \;.\; \operatorname{sen} (A + \varepsilon)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

donde

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \varepsilon \;.\; \operatorname{sen} (A - \varepsilon)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}} \ldots \quad (17)$$

De modo analogo

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B \;.\; \cos C}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{\cos A + (\cos B \;.\; \cos C + \operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{\cos A + \operatorname{sen} (B - C)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A - B + C) \;.\; \cos \frac{1}{2} (A + B - C)}{\operatorname{sen} B \;.\; \operatorname{sen} C}$$

ou

$$\frac{1+\cos a}{2}=\frac{\cos\,[90^{\circ}-(B-\varepsilon)]\;.\;\cos\,[90^{\circ}-(C-\varepsilon)]}{\operatorname{sen} B\;.\;\operatorname{sen} C}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\,(B-\varepsilon)\;.\;\operatorname{sen}\,(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B\;.\;\operatorname{sen} C}$$

donde

$$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\,(B-\varepsilon)\;.\;\operatorname{sen}\,(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B\;.\;\operatorname{sen} C}}\quad(18)$$

Finalmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\;.\;\operatorname{sen}\,(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\,(B-\varepsilon)\;.\;\operatorname{sen}\,(C-\varepsilon)}}\;..\quad(19)$$

Os radicaes devem ser tomados positivamente: porque sendo o lado a inferior a 180°, o segmento $\frac{1}{2}a$ é menor que 90° e todas as funcções trigonometricas do primeiro quadrante são positivas.

38 — Posto isto, attendendo á relação (19) e á seguinte, que d'ella se deduz por permutação

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\;.\;\operatorname{sen}\,(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\,(C-\varepsilon)\;.\;\operatorname{sen}\,(A-\varepsilon)}}$$

resulta

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a=\operatorname{tang}\frac{1}{2}b=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\,(C-\varepsilon)}$$

e

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\operatorname{sen}(A - \varepsilon)}{\operatorname{sen}(B - \varepsilon)}$$

Mas

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a + \operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$$

donde, dividindo por $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c} + \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)} + \dfrac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon) + \operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon) - \operatorname{sen}\varepsilon}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B - 2\varepsilon) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)}{2 \cos \frac{1}{2} C \cdot \cos \frac{1}{2}(C - 2\varepsilon)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(90^{\circ} - \frac{C}{2}\right) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2} C \cdot \operatorname{sen}\left[90^{0} - \frac{1}{2}(A + B)\right]}$$

isto é

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}$$

Analogamente

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} - \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(A - \varepsilon)}{\operatorname{sen}(C - \varepsilon)} - \dfrac{\operatorname{sen}(B - \varepsilon)}{\operatorname{sen}(C - \varepsilon)}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen}(C - \varepsilon)}}$$

$$= \frac{\text{sen}\,(A-\varepsilon) - \text{sen}\,(B-\varepsilon)}{\text{sen}\,(C-\varepsilon) + \text{sen}\,\varepsilon}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+B-2\varepsilon)}{2\cos\frac{1}{2}(C-2\varepsilon)\,.\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\cos\left(90^0-\frac{1}{2}C\right)}{\cos\left[90^{\circ}-\frac{1}{2}(A+B)\right]\,.\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C}$$

isto é

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}c} = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+B)}$$

As formulas (B) deduzem-se tambem das formulas (A), e vice-versa, pela consideração do triangulo polar do proposto.

C). RELAÇÕES ENTRE SEIS ELEMENTOS, GERALMENTE CHAMADAS ANALOGIAS DE DELAMBRE

39 — *Em qualquer triangulo espherico teem logar as relações*

$$\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,, \quad \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c} \ldots\ldots \text{(C)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c} \ldots\ldots \text{(D)}$$

Para demonstrar as expressões (C), temos que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}A \,.\, \cos\frac{1}{2}B + \cos\frac{1}{2}A \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}B$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} \times \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a}}$$

$$+ \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} \times \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c) \,.\, \operatorname{sen}(p-a}{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}}$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (2\,p - a - b) \,.\, \cos \frac{1}{2} (a - b)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} c} \,.\, \cos \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} c} \,.\, \cos \frac{1}{2} C$$

donde

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{1} c}$$

Do mesmo modo se obtem

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\operatorname{sen} (p - b) - \operatorname{sen} (p - a)}{\operatorname{sen} c} \,.\, \cos \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \cos \frac{1}{2} (2\,p - a - b)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} c} \,.\, \cos \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \cos \frac{1}{2} c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} c} \,.\, \cos \frac{1}{2} C$$

donde

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}$$

40 — Para demonstrar as expressões (D), teremos analogamente

$$\cos\frac{1}{2}(A + B) = \cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}B - \operatorname{sen}\frac{1}{2}A \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}B$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} \times \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a}}$$

$$- \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b) \cdot \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} \times \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - c) \cdot \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - a) \cdot \operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}(2p - c)}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}c} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a + b)}{\cos\frac{1}{2}c} \operatorname{sen}\frac{1}{2}C$$

donde

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

De maneira analoga se acha

$$\cos \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} (p - c)}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2p - c) \cdot \cos \frac{1}{2} c}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} C$$

donde

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c}$$

41 — Dividindo, membro a membro, a primeira das formulas (C) pela primeira das (D), a segunda das (C) pela segunda das (D), e a segunda das (C) pela primeira das (C), obteem-se as analogias chamadas de Napier.

CAPITULO II

§ 1.º). Relações entre os lados e os angulos de um triangulo rectangulo

42 — Fazendo $A = 90^\circ$ nas formulas (5), (8), (9), (10), (11), (12) e (13), obteem-se as seguintes relações, cada uma das

quaes apenas contém tres dos cinco elementos a, b, c, B, C do triangulo A B C:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos a = \cos b \,.\, \cos c & \cos a = \operatorname{cotang} B \,.\, \operatorname{cotang} C \\ \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} b = \operatorname{tang} c \,.\, \operatorname{cotang} C \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} C & \operatorname{sen} c = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotang} B \\ \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} C & \cos B = \operatorname{tang} c \,.\, \operatorname{cotang} a \\ \cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} B & \cos C = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotang} a \end{array}\right\} \ldots (20)$$

Estas relações (20), podem-se traduzir por uma regra mnemonica devida a Manduit, a saber: Convencionando não contar o angulo recto A no numero dos elementos de um triangulo espherico rectangulo, e substituindo mentalmente cada um dos cathetos b e c pelo seu complemento (Fig. 12), teremos que o *coseno de uma qualquer das cinco quantidades*

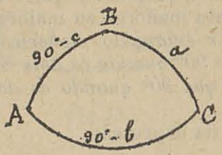

Fig. 12

a, B, 90° — c, 90° — b, B, *é egual ao producto das cotangentes dos dois elementos adjacentes ou ao producto dos senos dos elementos não adjacentes.*

Como corollario d'esta regra, deduz-se:

1.°. *Em qualquer triangulo espherico rectangulo, o numero dos lados agudos é impar (tres ou um).*

Com effeito, considerando a relação

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$$

e multiplicando ambos os membros d'ella por $\cos a$, resulta

$$\cos^2 a = \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c$$

Como o primeiro é um quadrado perfeito, o producto cos a . cos b . cos c é positivo; n'esse caso, ou cada um dos factores cos a, cos b, cos c, é positivo, e por conseguinte os lados a, b, c são menores que 90°, ou um dos factores é positivo e os dois outros negativos, e portanto um dos lados é menor que 90° e os dois restantes maiores que 90°.

2.°. *Em qualquer triangulo espherico rectangulo, cada catheto e o seu angulo opposto são da mesma especie (ambos agudos ou obtusos).*

Tomemos, com effeito, as relações

$$\text{sen } c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang B}}, \quad \text{sen } b = \frac{\text{tang } c}{\text{tang C}}$$

Sendo os lados b e c inferiores a 180°, sen b e sen c são positivos; logo tang c e tang C, assim como tang b e tang B, são do mesmo signal: quer dizer que c e C, bem como b e B, são simultaneamente menores ou maiores que 90°.

3.°. *Em qualquer triangulo espherico rectangulo, a hypotenusa é menor que 90° quando os dois cathetos são da mesma especie; e é maior que 90° quando os dois cathetos são de especie differente.*

Effectivamente, da expressão

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

conclue-se que, se b e c são da mesma especie, cos a é positivo, e portanto $a < 90°$; se são de differente especie, cos a é negativo e portanto $a > 90°$.

§ 2.°). Relações entre os lados e os angulos de um triangulo rectilatero

43 — Fazendo $a = 90°$ nas formulas fundamentaes (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), obteem-se as seguintes:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sen } B = \text{sen } b \,.\, \text{sen } A & \text{sen } C = \text{sen } c \,.\, \text{sen } A \\ \text{tang } B = -\text{tang } A \,.\, \cos c & \text{tang } C = -\text{tang } A \,.\, \cos b \\ \text{tang } B = \text{sen } C \,.\, \text{tang } b & \text{tang } C = \text{sen } B \,.\, \text{tang } a \\ \multicolumn{2}{c}{\cos A = -\text{cotang } b \,.\, \text{cotang } c} \\ \cos b = \cos B \,.\, \text{sen } c & \cos c = \cos C \,.\, \text{sen } b \end{array}\right\} \quad (21)$$

relações estas que se podem traduzir por uma regra devida a Manduit e analoga á de que trata o n.º 42.

Assim, convencionando não contar o lado recto a no numero dos elementos de um triangulo rectilatero, e substituir mentalmente cada um dos angulos B e C (Fig. 13) e o angulo A pelo seu supplemento, temos que o *coseno de qualquer ele-*

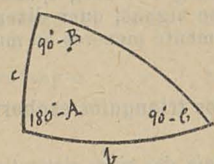

Fig. 13

mento é egual ao producto dos senos dos elementos não adjacentes, ou ao producto dos cotangentes dos elementos adjacentes.

Como corollario d'esta regra se deduz:

1.º. *Em qualquer triangulo rectilatero, o numero de angulos obtusos é impar (tres ou um).*

Com effeito, tomemos a relação

$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C$$

e multiplicando ambos os membros por cos A, vem

$$\cos^2 A = -\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C$$

Ora, sendo o primeiro membro um quadrado perfeito, o producto cos A . cos B . cos C é negativo, e n'esse caso ou cada um dos factores é negativo, e por consequencia os tres angulos são maiores que 90°, ou um dos factores é negativo e os dois outros positivos, e, por conseguinte, um dos angulos é maior que 90° e os outros dois inferiores a 90°.

2.°. *Em qualquer triangulo rectilatero, cada catheto e o seu angulo opposto são da mesma natureza* (simultaneamente *agudos* ou *obtusos).*

Consideremos as relações

$$\text{sen } B = \frac{\text{tang } C}{\text{tang } c} \quad \text{e} \quad \text{sen } C = \frac{\text{tang } B}{\text{tang } b}$$

Sendo os angulos B e C menores que 180°, sen B e sen C são positivos; logo tang C e tang c, assim como tang B e tang b, são do mesmo signal; quer dizer C e c, bem como B e b são simultaneamente menores ou maiores que 90°.

§ 3.°). Resolução dos triangulos esphericos rectangulos

44 — *Conhecendo dois dos cinco elementos* B, C, a, b, c, *calcular os outros tres.*

Seis casos se podem apresentar, a saber:

1.° caso. São dados os dois cathetos b e c do angulo recto. Temos, para determinar B, C, a, as formulas

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$$

$$\text{sen } c = \text{tang } b \,.\, \text{cotang } B \quad \text{donde} \quad \text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\text{sen } c}$$

$$\text{sen } b = \text{tang } c \,.\, \text{cotang } C \quad \text{»} \quad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$$

e no caso de a ficar mal determinado pelo seu coseno, a primeira das formulas é substituida pela seguinte

$$\text{tang } a = \frac{\text{tang } b}{\cos C} = \frac{\text{tang } c}{\cos B}$$

2.º *caso*. E' dada a hypotenusa a e o catheto b. Temos, para determinar B, C, e c, as formulas

$$\text{sen } b = \text{sen } a \,.\, \text{sen B} \quad \text{donde} \quad \text{sen B} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}$$

$$\cos C = \text{tang } b \,.\, \text{cotang } a$$

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c \quad \text{»} \quad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$$

3.º *caso*. Dá-se o catheto c e o angulo adjacente B. Temos, para determinar b, a, B as formulas

$$\text{sen } c = \text{tang } b \,.\, \text{cotang B} \quad \text{donde} \quad \text{tang } b = \frac{\text{sen } c}{\text{cotang B}}$$

$$\cos B = \text{tang } c \,.\, \text{cotang } a \quad \text{»} \quad \text{cotang } a = \frac{\cos B}{\text{tang } c}$$

$$\cos b = \cos c \,.\, \text{sen B}$$

4.º *caso* (duvidoso). E' dado o catheto c e o angulo opposto C. Temos, para determinar a, b e B as formulas

$$\text{sen } c = \text{sen } a \,.\, \text{sen C} \quad \text{donde} \quad \text{sen } a = \frac{\text{sen } c}{\text{sen C}}$$

$$\text{sen } b = \text{tang } c \,.\, \text{cotang C}$$

$$\cos C = \cos c \,.\, \text{sen B} \quad \text{»} \quad \text{sen B} = \frac{\cos C}{\cos c}$$

O problema pode ser impossivel, ou admittir uma ou duas soluções. Não tem solução se qualquer das quantidades sen a, sen b, sen B, fôr inferior á unidade. Tem uma se $c = C$, porque então

$$\text{sen } a = \text{sen } b = \text{sen B} = 1 \quad \text{ou} \quad a = b = B = 90^\circ$$

Sendo c differente de C, o problema só admitte solução se estes elementos fôrem da mesma natureza.

Sejam $c < 90°$ e $C < 90°$. Visto ser $\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}$ menor que 1, o problema só é possivel sendo c menor que C; satisfeita esta condição cada uma das tres formulas fornecerá dois valores supplementares; mas sendo o numero de lados agudos impar, e sendo cada catheto e o seu angulo opposto da mesma natureza, os elementos a, b, B são egualmente da mesma natureza e o problema admitte duas soluções.

Consideremos agora $c > 90°$ e $C > 90°$. Visto ser $\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}$ menor que 1, o problema é só possivel quando c fôr maior que C.

Satisfeita esta condição, o problema admitte ainda duas soluções, a saber: b e B são obtusos ou agudos, conforme a fôr agudo ou obtuso.

5.° caso. Dá-se a hypotenusa a e o angulo adjacente B. Temos, para determinar b, c, C as formulas

$$\text{sen}\, b = \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, B$$

$$\cos B = \text{tang}\, c \,.\, \text{cotang}\, a \quad \text{donde} \quad \text{tang}\, c = \frac{\cos B}{\text{cotang}\, a}$$

$$\cos a = \text{cotang}\, B \,.\, \text{cotang}\, C \quad \text{»} \quad \text{cotang}\, C = \frac{\cos a}{\text{cotang}\, B}$$

6.° caso. São dados os angulos B e C adjacentes á hypotenusa. Temos, para determinar a, b, c, as formulas

$$\cos a = \text{cotang}\, B \,.\, \text{cotang}\, C$$

$$\cos B = \cos b \,.\, \text{sen}\, C \quad \text{donde} \quad \cos b = \frac{\cos B}{\text{sen}\, C}$$

$$\cos C = \cos c \,.\, \text{sen}\, B \quad \text{»} \quad \cos c = \frac{\cos C}{\text{sen}\, B}$$

§ 4.º). Resolução dos triangulos esphericos rectilateros

45 — *Conhecendo dois dos cinco elementos b, c, A, B, C, calcular os tres restantes.*

Seis casos ha a considerar, conforme forem dados

$$B,\ C;\ A,\ B;\ C\ b,\ C\ c,\ A\ b,\ b,\ c$$

e podemos proceder de dois modos. O primeiro consiste em determinar as incognitas por meio das formulas estabelecidas pela regra mnemonica do n.º 43; o segundo em formar o triangulo polar A' B' C' do triangulo rectilatero A B C, de maneira que a resolução d'este ultimo triangulo se reduz á do triangulo rectangulo tendo por angulos: $A' = 90^\circ$, $B' = 180^\circ - b$, $C' = 180^\circ - c$, e por lados $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$, $c' = 180^\circ - C$.

§ 5.º). Resolução dos triangulos esphericos obliquangos

46 — *Conhecendo tres dos seis elementos do triangulo, calcular os outros tres.*

Ha seis casos a considerar, a saber:

1.º caso. São conhecidos os tres lados a, b, c. Temos para determinar A, B, C, as equações

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b\ .\ \cos c + \mathrm{sen}\ b\ .\ \mathrm{sen}\ c\ .\ \cos A\\ \cos b &= \cos c\ .\ \cos a + \mathrm{sen}\ c\ .\ \mathrm{sen}\ a\ .\ \cos B\\ \cos c &= \cos a\ .\ \cos b + \mathrm{sen}\ a\ .\ \mathrm{sen}\ b\ .\ \cos C\end{aligned}\right\}$$

as quaes dão

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\ .\ \cos c}{\mathrm{sen}\ b\ .\ \mathrm{sen}\ c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c\ .\ \cos a}{\mathrm{sen}\ c\ .\ \mathrm{sen}\ a}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos c\ .\ \cos b}{\mathrm{sen}\ a\ .\ \mathrm{sen}\ b}$$

Estas expressões não são directamente calculaveis por logarithmos, mas substituindo cos A, cos B, cos C, pelos seus valores, em funcção de sen $\frac{1}{2}$ A, cos $\frac{1}{2}$ A, sen $\frac{1}{2}$ B, etc., e seguindo a mesma marcha que no n.º 35, obtem-se:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{A} &= \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)\,.\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,p\,.\,\text{sen}\,(p-a)}}\ \text{(1)} \\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{B} &= \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-c)\,.\,\text{sen}\,(p-a)}{\text{sen}\,p\,.\,\text{sen}\,(p-b)}} \\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{C} &= \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-a)\,.\,\text{sen}\,(p-b)}{\text{sen}\,p\,.\,\text{sen}\,(p-c)}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (22)$$

Estas formulas (22) exprimem A, B, C, por meio de 3 logarithmos e 4 cologarithmos.

2.º *caso*. São dados os tres angulos A, B, C. Temos para determinar os lados a, b, c, as equações

$$\begin{aligned} \cos \text{A} &= -\cos \text{B}\,.\,\cos \text{C} + \text{sen B}\,.\,\text{sen C}\,.\,\cos a \\ \cos \text{B} &= -\cos \text{C}\,.\,\cos \text{A} + \text{sen C}\,.\,\text{sen A}\,.\,\cos b \\ \cos \text{C} &= -\cos \text{A}\,.\,\cos \text{B} + \text{sen A}\,.\,\text{sen B}\,.\,\cos c \end{aligned}$$

as quaes dão

$$\cos a = \frac{\cos \text{A} + \cos \text{B}\,.\,\cos \text{C}}{\text{sen B}\,.\,\text{sen C}}$$

$$\cos b = \frac{\cos \text{B} + \cos \text{C}\,.\,\cos \text{A}}{\text{sen C}\,.\,\text{sen A}}$$

$$\cos c = \frac{\cos \text{C} + \cos \text{A}\,.\,\cos \text{B}}{\text{sen A}\,.\,\text{sen B}}$$

(1) Esta primeira formula (22) é a expressão (16) já deduzida.

ou, substituindo cos a, cos b, cos c, em funcção de sen $\frac{1}{2}a$, sen $\frac{1}{2}b$ e sen $\frac{1}{2}c$, seguindo a mesma marcha que no n.º 37, resulta

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \,.\, \operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\,.\,\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}\ ^{(1)} \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \,.\, \operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)\,.\,\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}} \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \,.\, \operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\,.\,\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Estas formulas (23) exprimem os lados a, b, c, por meio de 4 logarithmos e 3 cologarithmos.

3.º caso. São dados dois lados a e b e o angulo comprehendido C.

Para deduzir os valores dos dois outros angulos A e B, e do terceiro lado c, procede-se do modo seguinte: A 1.ª analogia (A) de Napier dá

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \operatorname{cotang}\frac{1}{2}C \,.\, \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

donde

$$\frac{1}{2}(A+B) = M$$

(1) Esta formula é a (19) deduzida no n.º 37.

A 2.ª analogia (A) de Napier dá egualmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotang}\frac{1}{2}C\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}$$

donde

$$\frac{1}{2}(A-B)=N$$

e portanto

$$\left.\begin{array}{l}A=M+N\\B=M-N\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\quad(24)$$

Da 1.ª analogia (B) de Napier tira-se

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\ldots\ldots\ldots\quad(25)$$

4.º caso. Dá-se um lado c e os dois angulos adjacentes A e B. Para obter os valores dos outros dois lados e o do 3.º angulo, procede-se por modo identico ao seguido no caso anterior.

De facto, a 1.ª das analogias (B) de Napier, dá

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

donde

$$\frac{1}{2}(a+b)=m$$

Da 2.ª das mesmas analogias (B), tira-se tambem

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\ .\ \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

donde

$$\frac{1}{2}(a-b)=n$$

e portanto

$$\left.\begin{aligned}a&=m+n\\ b&=m-n\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\quad(26)$$

A 1.ª das analogias (A) dá

$$\operatorname{cotang}\frac{1}{2}C=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)\ .\ \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\ \ldots\ldots\quad(27)$$

5.º caso (duvidoso). São conhecidos dois lados a e b e o angulo A opposto a um d'elles.

Procede-se da seguinte forma: A relação

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} \quad \text{dá} \quad \text{sen } B = \text{sen } A \, . \, \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \ldots\ldots \quad (28)$$

Da 1.ª das analogias (A) de Napier deduz-se

$$\text{cotang} \frac{1}{2} C = \text{tang} \frac{1}{2} (A + B) \, . \, \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \ldots\ldots \quad (29)$$

A 1.ª analogia (B) de Napier dá

$$\text{tang} \frac{1}{2} c = \text{tang} \frac{1}{2} (a + b) \, . \, \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Para determinar C e c, sendo $a \gtrless b$, podem-se utilisar tambem as 2.ªs relações de (A) e (B) de Napier.

Com effeito, da 2.ª de (A) deduz-se

$$\text{cotang} \frac{1}{2} C = \text{tang} \frac{1}{2} (A - B) \, . \, \frac{\text{sen} \frac{1}{2} (a + b)}{\text{sen} \frac{1}{2} (a - b)} \ldots\ldots \quad (31)$$

e da 2.ª de (B),

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)\,.\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}\ \ldots\ldots\ldots\ (32)$$

6.º caso (duvidoso). São dados dois angulos A e B e o lado a, opposto a um d'elles.

Para determinar os outros elementos, empregamos as formulas

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b}$$

donde

$$\operatorname{sen}b=\operatorname{sen}a\,.\,\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A}\ldots\ldots\ldots\ (33)$$

Da 1.ª das relações (B) de Napier, tira-se

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\ \ldots\ldots\ldots\ (34)$$

e da 1.ª das relações (A) de Napier, deduz-se egualmente

$$\operatorname{cotang}\frac{1}{2}C=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\ \ldots\ldots\ (35)$$

Para determinar c e C, sendo A $\lesseqgtr$ B, empregam-se tambem as 2.as relações (B) e (A) de Napier, pelas quaes se obteem as formulas (31) e (32).

N'este 6.º caso o elemento b é dado pelo seu seno, não sendo possivel o problema, apenas se sen $b \leqq 1$.

Este 6.º caso reduz-se ao 5.º pela consideração do triangulo polar do triangulo dado.

§ 6.º). Expressões diversas do excesso espherico

47 — O *excesso espherico*, ou o excesso da somma dos tres angulos de um triangulo espherico sobre dois angulos rectos, pode ser calculado de differentes maneiras, a saber:

1.º *Em funcção de dois lados e do angulo comprehendido.*

A 1.ª das relações (A) de Napier, dá

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{cotang}\frac{1}{2}C$$

e visto ser (n.º 17)

$$A+B+C-180^\circ=2\varepsilon$$

resulta

$$\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\left(\frac{C}{2}-\varepsilon\right)\ldots\ldots\ldots(36)$$

e

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotang}\left(\frac{C}{2}-\varepsilon\right)$$

e por conseguinte

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{C}{2}-\varepsilon\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{cotang}\frac{1}{2}C$$

ou tambem

$$\operatorname{tang}\left(\frac{C}{2}-\varepsilon\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$$

No caso particular do angulo C ser recto, tem-se

$$\operatorname{tang}(45^\circ-\varepsilon)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{tang}45^\circ$$

ou

$$\frac{1-\operatorname{tang}\varepsilon}{1+\operatorname{tang}\varepsilon}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

ou ainda

$$\frac{(1+\operatorname{tang}\varepsilon)-(1-\operatorname{tang}\varepsilon)}{(1+\operatorname{tang}\varepsilon)+(1-\operatorname{tang}\varepsilon)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

ou seja

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} b. \;\ldots\ldots \quad (37)$$

2.º *Em funcção dos tres lados.*
Da formula (36), tira-se

$$\cos \frac{1}{2}(A + B) = \cos\left(\frac{1}{2} C - \varepsilon\right)$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) = \cos\left(\frac{1}{2} C - \varepsilon\right)$$

As analogias (D) de Delambre dão respectivamente

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2} C - \varepsilon\right)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

ou

$$\frac{\cos\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right) - \cos \frac{1}{2} C}{\cos\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right) + \cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C - \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} C - \varepsilon\right)} = \frac{\cos \frac{1}{2} c - \cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2} c + \cos \frac{1}{2}(a + b)}$$

isto é

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C-\varepsilon)\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon=\operatorname{tang}\frac{c-a+b}{4}\,.\,\operatorname{tang}\frac{c+a-b}{4}$$

$$=\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\ldots\quad(38)$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C-\varepsilon)}=\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}\,.\,\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}=$$

$$=\operatorname{tang}\frac{p}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(39)$$

e multiplicando as egualdades (38) e (39) uma pela outra, resulta

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varepsilon=\operatorname{tang}\frac{p}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-a)\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-b)\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-c)}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(40)$$

formula devida a Simão Luilier, e conhecida ordinariamente por este nome.

CAPITULO III

Applicações diversas

48 — *Circulos circumscripto, inscripto e ex-inscriptos a um triangulo espherico.*

1.º Seja O o polo do circulo circumscripto ao triangulo espherico A B C (Fig. 14) e R o *raio polar* d'este circulo, isto

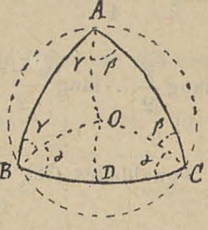

Fig. 14

é o arco de circulo maximo que reune o polo aos vertices do triangulo.

Designemos por α, β, γ os angulos nas bases dos triangulos isosceles B O C, C O A, A O B. Teremos

$$\beta + \gamma = A \quad , \gamma \pm \alpha = B \quad , \beta \pm \alpha = C$$

tomando o signal + ou — conforme o polo O cahir dentro do triangulo A B C, ou fóra, no angulo A.

Sommando estas ultimas egualdades vem

$$\beta + \gamma \pm \alpha = \frac{1}{2}(A + B + C) = 90^\circ + \varepsilon$$

e portanto

$$\begin{aligned} \pm\alpha &= (\beta+\gamma\pm\alpha)-(\beta+\gamma) = 90^\circ-(A-\varepsilon) \\ \beta &= (\beta+\gamma\pm\alpha)-(\gamma\pm\alpha) = 90^\circ-(B-\varepsilon) \\ \gamma &= (\beta+\gamma\pm\alpha)-(\beta\pm\alpha) = 90^\circ-(C-\varepsilon) \end{aligned}$$

Posto isto, traçando o arco de circulo maximo O D, perpendicular a B C, deduz-se, no triangulo rectangulo B O D

$$\cos\alpha = \text{cotang}\,\frac{1}{2}a\ .\ \text{cotang}\,R$$

donde

$$\text{cotang}\,R = \frac{\text{sen}\,(A-\varepsilon)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}.$$

ou, substituindo tang $\frac{1}{2}a$ pelo seu valor em funcção dos angulos do triangulo (n.º 37), temos

$$\text{cotang}\,R = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(A-\varepsilon)\ .\ \text{sen}\,(B-\varepsilon)\ .\ \text{sen}\,(C-\varepsilon)}{\text{sen}\,\varepsilon}}$$

2.º Seja O o polo do circulo menor inscripto no triangulo espherico A B C (Fig. 15) e r o *raio polar* d'este circulo, isto é o arco de circulo maximo que une o polo com os pontos de contacto D, E, F.

Do triangulo rectangulo A O F deduz-se

$$\text{sen}\,A\,F = \text{tang}\,r\ .\ \text{cotang}\,\frac{1}{2}A$$

donde

$$\text{tang } r = \text{sen } (p - a) \ . \ \text{tang } \frac{1}{2} A$$

ou, substituindo tang $\frac{1}{2}$ A pelo seu valor, em funcção dos lados, (n.º 35), resulta

$$\text{tang } r = \sqrt{\frac{\text{sen } (p - a) \ . \ \text{sen } (p - b) \ . \ \text{sen } (p - c)}{\text{sen } p}}$$

3.º Designando por r', r'', r''' os raios polares dos circulos menores *ex-inscriptos* ao triangulo A B C, isto é, tangentes

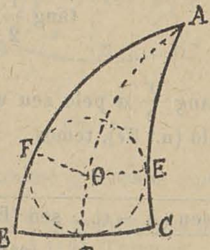

Fig. 15

respectivamente a cada um dos lados a, b, c, e aos prolongamentos dos dois outros, temos da mesma forma

$$\text{tang } r' = \text{sen } p \ . \ \text{tang } \frac{1}{2} A \quad \text{tang } r'' = \text{sen } p \ . \ \text{tang } \frac{1}{2} B$$

$$\text{tang } r''' = \text{sen } p \ . \ \text{tang } \frac{1}{2} C$$

ou

$$\operatorname{tang} r' = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-a)}}$$

$$\operatorname{tang} r'' = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-c) \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\operatorname{tang} r''' = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-c)}}$$

49 — *Reducção de um angulo ao horisonte* — Reduzir ao horisonte um angulo B O C $= a$ (Fig. 16), observado em um plano inclinado, consiste em obter o angulo B A C = A que

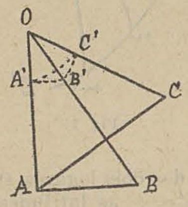

Fig. 16

formam entre si as projecções A B, A C dos lados O B, O C d'este angulo sobre um plano horisontal.

Supponhamos que se mediram os angulos A O C $= b$, A O B $= a$ dos lados O B, O C com a vertical O A.

Imaginemos uma esphera tendo por centro o ponto O, e para raio a unidade; a sua intersecção com as faces do angulo triedro O A B C dá o triangulo espherico A$'$ B$'$ C$'$.

Ora, n'este triangulo conhecem-se os tres lados B$'$ C$'$ $= a$, C$'$ A$'$ $= b$, A$'$ B$'$ $= c$: teremos, pois, para determinar o angulo B$'$ A$'$ C$'$ = A a formula (16), (n.º 35)

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)}}$$

50 — *Distancia entre dois pontos do globo.* — *Achar a distancia que separa dois pontos M e M' situados á superficie da terra, conhecendo as longitudes* L *e* L' *e as latitudes* l *e* l'.

Sejam: P o polo boreal (Fig. 17), E E' o equador. P E o meridiano inicial e M e M' os logares dados; E m = L, E m'

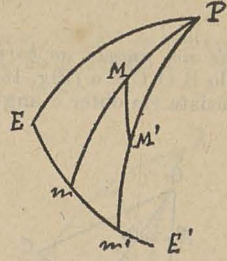

Fig. 17

= L', as longitudes dos dois logares, suppostas ambas *orientaes;* M $m = l$, M' $m' = l'$ as latitudes dos mesmos logares, suppostas ambas *boreaes*.

No triangulo espherico M P M', são conhecidos o angulo M P M' = L' — L, o lado P M = 90° — l e o lado P M' = 90° — l.

Designando, pois, por x (n.° 31) o arco M M', a relação fundamental (5) da trigonometria espherica, dá

$$\cos x = \operatorname{sen} l \,.\, \operatorname{sen} l' + \cos l \,.\, \cos l' \,.\, \cos (L - L')$$

ou, fazendo

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{cotang} l \,.\, \cos (L - L')$$

resulta

$$\cos x = \frac{\text{sen } l \ . \ \text{sen } (x + l')}{\cos x}$$

Esta expressão foi deduzida suppondo ambas as longitudes orientaes e ambas as latitudes boreaes, mas ella é applicavel a todos os casos, desde que se convencione tomar como *negativas* as longitudes occidentaes e as latitudes austraes.

FIM