

PROPAGANDA DE INSTRUÇÃO
PARA
Portuguezes e Brasileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

Noções sobre cálculo das probabi-
lidades, theoria dos erros e me-
thodo dos minimos quadrados

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

Capitão de Engenharia

Cada volume abrange 64 paginas, de compo-
sição cheia, edição estereotypada, — e fórma
um tratado elementar completo n'algun ramo
de sciencias, artes ou industrias, um florilegio
litterario, ou um aggregado de conhecimentos
uteis e indispensaveis, expostos por fórma
succinta e concisa, mas clara, despretenciosa
popular, ao alcance de todas as intelligencias.

“A EDITORA”

SOCIEDADE ANONYMA DE RESPONSABILIDADE LIMITADA

Séde — L. do Conde Barão,

LISBOA

gencias: PORTO — R. dos Clerigos, 96, 98

1.º RIO DE JANEIRO — R. de S. Pedro, 33

1904

NUMERO

223

2726



CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO

N.º 2726

Ernesto Pedro Laranha
do
Caminho
(Veneto)

B. 172 m
Série B.

Scientia et Labor.

Noções sobre cálculo das probabilidades, theoria dos erros e methodo dos minimos quadrados

Cálculo das probabilidades

1. *Historia.* — A doutrina das probabilidades remonta a Fermat e Pascal. Huygens foi o primeiro que apresentou o cálculo das probabilidades sob a forma de tratado, com o titulo de *De ratiocinis in ludo*; a *Ars Conjectandi*, de J. Bernoulli (postuma, 1713), e a *Doctrine of chances*, de Moivre (1718), elevaram o cálculo das probabilidades á categoria de ramo das mathematicas.

Taylor introduziu tambem (*Methodus incrementorum*), indirectamente, importantes melhoramentos nos methodos proprios para a resolução das questões que dizem respeito ao cálculo das probabilidades.

De então para cá, diversos mathematicos, taes como Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Simpson, Sussmilch, Price e Davillard, applicaram-n'o a questões relativas á população, nascimentos, mortalidade, etc., deduziram fórmulas proprias para o cálculo das rendas vitalicias, juros de obrigações, etc.

Entre os colaboradores da theoria geral das probabilidades no seculo XIX, citam-se Laplace, Lacroix, Litrow, Quetelet, Dedekind, Helmert, Laurent, Liagre, Didion e Poincaré. Morgan e Boole aperfeiçoaram a theoria, mas accrescentaram pouca coisa que se possa considerar fundamentalmente nova. Cruber fez muito, tanto na sua propria collaboração, como traduzindo Meyer. Pelo lado geometrico foi notavel a influencia de Miller e do *The Educational Times*, e tambem dos collaboradores d'este jornal Crofton, Mac Cull, Wolstenholme, Watson e Artemas Martin.

2. *Probabilidade mathematica.* — Os effeitos que observamos nunca proveem de uma causa unica ou lei simples;

sempre condições accessorias, mais ou menos numerosas, constantes ou variaveis, veem modificar o effeito principal. Estas modificações são raras vezes calculaveis, porque é conhecida uma parte das condições, e por conseguinte a previsão não pode ser, por nossa parte, senão incompleta. Assim, ao passo que um acontecimento esperado, comporta, no fundo, uma unica possibilidade determinada, ha para nós um certo numero de possibilidades $p', p'', p''', \dots$, das quaes uma deve necessariamente produzir-se, mas sem que tenhamos razões para esperar uma certa e determinada, de preferencia a outra. Se em virtude de certos caracteres especificos, unicos que nos interessam, dividirmos estas probabilidades em grupos $E_1, E_2, E_3, \dots$ e se considerarmos todas as de um mesmo grupo, como identicas, ou constituindo apenas um mesmo acontecimento, diremos que um acontecimento E_n , comprehendendo maior numero de possibilidades do que outro, é *mais provavel*. E' natural dizer, além d'isso, que as probabilidades dos diversos acontecimentos E_n são proporcionaes aos numeros correspondentes, e tomar para expressão de uma d'ellas a *relação d'este numero para o numero total das possibilidades p*.

Dá-se habitualmente a estes o nome de *casos favoraveis* a um acontecimento E_n , se elles pertencem ao seu grupo de possibilidades, e de *casos desfavoraveis* se pertencem a outro grupo.

Supponhamos que se lança um dado sobre uma mesa; este move-se primeiramente algum tempo, para depois assentar por uma face, quando a fôrça viva se exgottou.

Supposto o dado perfeitamente homogeneo, pode assentar por qualquer das faces, e estes diversos casos são para nós egualmente possiveis, visto não conhecermos as condições diversas, das quaes elles dependem, a saber: a forma precisa e a elasticidade do dado, o ponto de applicação, a direcção e a intensidade da fôrça que o lançou, a resistencia que lhe oppõe o ar, o attrito, etc.

Tendo o dado *seis* faces, das quaes *tres* brancas, *duas* vermelhas e *uma* preta, diremos que a appareição de uma das faces brancas, ou de uma das vermelhas, ou ainda da preta, são acontecimentos de probabilidades respectivamente *proporcionaes* aos numeros 3, 2, 1 e *eguaes* ás frac-

ções $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$.

Vê-se que a probabilidade é, por assim dizer, de con-

venção: em um conjunto de casos igualmente possíveis, põe-se de parte um certo numero, com caracter commum, que é a *côr*, no nosso exemplo, e desprezam-se as suas diferenças para apenas se occupar d'este; de modo que é sacrificando a precisão individual que se ganha sobre a probabilidade.

Vê-se, além d'isso, que o cálculo da probabilidade se baseia em uma hypothese essencial, a de casos igualmente possíveis.

Esta hypothese, que nunca deveremos perder de vista, deriva da experiencia, mas não existe em todo o rigor; é uma abstracção mathematica, como é, por exemplo, a da elasticidade perfeita na theoria do choque dos corpos. Contudo, é necessario que nenhum motivo haja para suppor que um dos casos tem mais facilidade que os outros em se produzir.

A probabilidade é, pois, da mesma forma que o *acaso*, uma coisa inteiramente subjectiva, e não a mesma para pessoas que teem dados differentes sobre as condições da producção dos acontecimentos.

A probabilidade assim definida toma o nome de *probabilidade mathematica*, para a distinguir do que se pode chamar *probabilidade philosophica*. Em vez de se originar em um principio de divisão creado pelo nosso espirito, esta ultima baseia-se na *inducção* e na *analogia*, pelas quaes partimos de factos particulares para uma lei geral, formulada mais ou menos explicitamente, e aproveitamol-a, em seguida, como instrumento de investigação d'outros factos particulares. Não parece que a probabilidade das conclusões ás quaes se é levado, seja expressa por *numeros*, embora elles se nos imponham *mais ou menos*, conforme o grau de simplicidade, a sua concordancia com as noções que já possuímos, etc.

A probabilidade toma denominações distinctas, segundo os casos. Chama-se probabilidade simples, composta, ou total, conforme o acontecimento de que nos occuparmos se considera isoladamente, dependendo do concurso de varios outros, ou podendo ser produzido por várias causas.

3. Probabilidade simples. — Consideremos um acontecimento A que satisfaça ás condições acima especificadas, isto é, dependendo de um numero determinado N, maior ou menor, de casos possíveis. Seja *m* o numero de casos favoraveis a A, e *n* o dos desfavoraveis. A probabilidade da sua realisação, será

$$p = \frac{m}{N} = \frac{m}{m + n}$$

e a da não realização

$$q = \frac{n}{N} = \frac{n}{m + n} = 1 - p$$

A somma d'estas duas probabilidades é evidentemente igual á unidade.

Este resultado é muito importante, pois, attendendo a elle, muitos problemas de probabilidades totaes e compostas podem reduzir-se a probabilidades simples. Assim, tendo dentro de uma urna: a espheras brancas, b pretas

e c vermelhas, será $\frac{a}{a + b + c}$ a probabilidade de tirar

uma esphera da primeira côr, $\frac{b}{a + b + c}$ a de tirar da se-

gunda, e $\frac{c}{a + b + c}$ a de tirar da terceira.

Qualquer d'estas probabilidades é igual á differença entre a unidade e a somma das outras duas.

Perguntando-se, portanto, qual é a probabilidade de não tirar vermelhas, como este facto se pode dar de duas maneiras differentes, em vez de sommar as duas fracções, relativas ás outras côres, podemos simplesmente determi-

tar $1 - \frac{c}{a + b + c}$. E mais conveniente seria ainda o processo se houvesse mais côres.

4. O cálculo de N e de m faz-se, em geral, por enumerações de combinações, que se dividem, como sabemos, em

<i>Combinações propriamente ditas</i>	} com ou sem repetição
<i>Arranjos.....</i>	
<i>Permutações</i>	

Não apresentamos as fórmulas, que são subejamente conhecidas, mas mostraremos o uso d'ellas pelos exemplos seguintes:

1.º Qual é a probabilidade de obter com um dado de seis faces n vezes a seguir 3?

A cada lançamento são possíveis seis casos e podem-se associar a cada uma das combinações precedentes, cujo numero fica assim multiplicado. O numero das combinações possíveis para n provas é, pois, 6^n ; como apenas é pedida uma, segue-se que a probabilidade é $\frac{1}{6^n}$.

2.º Qual é a probabilidade de produzir com dois dados uma somma de pontos igual a 7?

O numero dos casos possíveis, quando se lançam dois dados é 36.

A somma 7 pode ser obtida por 6 e 1, 5 e 2 e 4 e 3. Cada uma d'estas maneiras representa dois casos; 6 e 1, por exemplo, pode resultar de 6, fornecido pelo primeiro dado, com 1, pelo segundo, ou de 1, dado pelo primeiro, com 6, pelo segundo.

Em 36 casos possíveis, 6 são favoráveis; a probabilidade é $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$.

3.º Qual é a probabilidade de um jogador possuir os quatro azes no seu baralho?

Esta probabilidade p é igual ao numero n das combinações, nas quaes se acham os quatro azes dividido pelo numero total N das combinações possíveis. Sabe-se que o baralho tem 32 cartas, que 12 são dadas a cada jogador, e que as oito restantes, divididas em dois macetes, um de 5 e outro de 3, são deixadas sobre a mesa. Ora, é claro que se não altera o estado do jogo, se permutarmos as cartas, em cada macete, de todos os modos possíveis; além d'isso, ha a certeza que o jogador considerado, terá os quatro azes se os puzer primeiro no seu jogo, e se fizermos a distribuição com as 28 outras cartas, mas não lhe dando então senão 8, pois que deve ter 12 ao todo.

Designando, como é geralmente costume, por $m!$ o producto 1. 2. 3. m , que exprime o numero de permutações de m objectos, tem-se

$$N = \frac{32!}{12! 12! 5! 3!} \quad n = \frac{28!}{8! 12! 5! 3!}$$

d'onde

$$p = \frac{N}{n} = \frac{9. 10. 11. 12}{29. 30. 31. 32} = 0,01376$$

4.º *Pedro e Paulo são submettidos a um escrutinio de votação; a urna contém m listas favoraveis a Pedro, n favoraveis a Paulo; m é maior que n, logo Pedro será eleito. Qual é a probabilidade para que, durante a contagem dos votos, as listas saiam por ordem tal que Pedro não deize um momento sequer de ter maioria?*

O numero de combinações possiveis é o dos arranjos de $m + n$ letras, entre as quaes m semelhantes entre si representam o nome de Pedro e as n outras, semelhantes tambem, representam o nome de Paulo. O numero d'estes arranjos é

$$\frac{1.2.3. \dots (m+n)}{1.2.3. \dots m \cdot 1.2.3. \dots n}$$

Procuremos o numero d'elles, nos quaes Paulo, em um dado momento, tem os mesmos votos que Pedro. Entre estes arranjos é preciso contar todos os que começam pelo nome de Paulo.

O seu numero é o dos arranjos de $m + n - 1$ letras, entre as quaes m semelhantes entre si representam o nome de Pedro, e as $n - 1$ outras o de Paulo. Este numero é

$$\frac{1.2.3. \dots (m+n-1)}{1.2.3. \dots m \cdot 1.2.3. \dots (n-1)}$$

e constituem precisamente a metade do numero que procuramos.

Vamos demonstrar, (1) com effeito, que a contagem das listas que começam pelo nome de Pedro, e no qual a egualdade dos suffragios se produz em uma dada occasião, correspondendo um a um, de modo perfeitamente determinado, aos arranjos de $m + n - 1$ letras é expressa pela fórmula anterior.

Representemos por A as listas com o nome de Pedro e por B as que teem o de Paulo.

Consideremos uma combinação começando por A , e na qual, em um certo momento, quando se enunciam todos os termos a partir do primeiro, o numero dos B é egual ao dos A . Fiquemos n'esta enumeração feita da esquerda para a direita, a primeira vez que esta egualdade se pro-

(1) Esta demonstração é devida a M. André.

duz. Retiremos o grupo já enunciado, transportemol-o para o fim da combinação depois de ter retirado o B que o termina necessariamente. Formaremos a combinação de $m + n - 1$ letras, conjugada da escolhida.

Por exemplo, a combinação $A A B B A B A B$, tendo quatro A e quatro B , dará $A B A B A A B$, com quatro A e tres B .

A combinação de $m + n - 1$ letras, deduzida, como dissemos, de uma das combinações que começam por A , cuja conta queremos fazer, permite quando ella fôr dada, achar aquella de que se deduz. Basta enumerar as letras começando pela direita até o momento que não pode deixar de se produzir, visto que os A estão em maioria, excedendo de uma unidade os B . Tirar-se-ha então o grupo assim definido para fazer o começo da combinação, transportando-o para a esquerda depois de ter separado termos não transportados, conservando a sua ordem, pela letra B accrescentada no fim.

A totalidade dos votos, nos quaes o numero das letras B , em uma certa occasião, attinge a egualdade, é pois

$$2 \frac{1.2.3 \dots (m+n-1)}{1.2.3 \dots m. 1.2.3 \dots (n-1)}$$

Dividindo pelo numero total dos arranjos distinctos

$$\frac{1.2.3 \dots (m+n)}{1.2.3 \dots m. 1.2.3 \dots n}$$

o quociente

$$\frac{2n}{m+n}$$

exprime a probabilidade de Pedro, durante o escrutinio, perder, em um dado instante, a vantagem.

A probabilidade de Pedro conservar sempre vantagem é

$$1 - \frac{2n}{m+n} = \frac{m-n}{m+n}$$

5. Probabilidade total. — Sendo, por definição, a probabilidade de um acontecimento a relação do numero dos

casos favoraveis para o dos possiveis, *se subdividirmos os casos favoraveis em varios grupos, a probabilidade do acontecimento será equivalente á somma das probabilidades de que elle pertença a cada um d'esses grupos.*

Addicionam-se effectivamente as fracções com o mesmo denominador sommando os numeradores.

A escolha dos grupos é arbitraria, com a condição unica, bem entendido, d'elles conterem todos os casos possiveis sem que nenhum se encontre repetido.

Se, por exemplo, para calcular a probabilidade de tirar senas, pelo menos uma vez em 20 lanços, effectuassemos a somma das probabilidades calculadas para cada lanço, applicavamos mal o principio. A sena obtida uma vez nada tem com o resultado seguinte.

6. Probabilidade relativa. — A probabilidade *relativa* de um acontecimento, é o quociente que se obtem dividindo a probabilidade absoluta d'este acontecimento pela somma das probabilidades absolutas dos acontecimentos que se comparam.

Quando se lançam dois dados simultaneamente, a probabilidade de obter uma somma de pontos igual a 7 antes da somma 4, seria pois, attendendo ao que se disse no n.º 2

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{2}{3}$$

7. Probabilidade composta. Theorema de Moivre. — Um acontecimento composto é definido pelo concurso de varios acontecimentos simples que o acaso deve produzir successiva ou simultaneamente. O numero dos casos possiveis, quando os acontecimentos simples são independentes, é igual ao producto $p_1, p_2, \dots p_k$ dos numeros de casos possiveis em cada um d'elles, podendo cada caso de um dos grupos associar-se com todos os dos outros grupos. O numero dos casos favoraveis ao concurso dos acontecimentos simples, cuja reunião forma o acontecimento composto, é por analogia razão, o producto dos numeros dos casos $m_1, m_2, \dots m_k$ favoraveis á producção de cada um d'elles.

A probabilidade do acontecimento composto é, pois,

$$\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_k}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k} = \frac{m_1}{p_1} \times \frac{m_2}{p_2} \times \frac{m_3}{p_3} \times \dots \times \frac{m_k}{p_k}$$

isto é, o producto das probabilidades dos acontecimentos simples.

Um caso previsto é aquelle em que a probabilidade do segundo acontecimento é influenciada pelo modo como o primeiro se produz. Por exemplo, a probabilidade de tirar a seguir m esferas brancas de uma urna que contém a brancas e b pretas, na hypothese de se não tornar a pôr na urna as esferas tiradas, é

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \dots \cdot \frac{a-m+1}{a+b-m+1}$$

A probabilidade de tirar uma esphera branca e em seguida uma preta, seria

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1}$$

Assim, a probabilidade de um acontecimento composto, é o producto da probabilidade do primeiro acontecimento pela probabilidade que adquire o segundo *quando sabemos que o primeiro se realisou*.

8. As regras das probabilidades totaes e compostas, applicam-se a todas as combinações de probabilidades simples suppostas expressas em numeros.

Os problemas seguintes mostram bem a simplicidade que resulta da consideração das probabilidades compostas, dando logar a observações uteis.

1.º *Supponhamos que se deitaram em uma urna 3 esferas brancas e 7 pretas, e que em seguida se tirou uma, repondo-a e se procedeu a nova tiragem; podem sahir duas brancas, ou duas pretas, ou uma branca e uma preta. Qual é a probabilidade de sahir duas esferas brancas?*

Como a mesma esphera pode sahir duas vezes a seguir, o numero das combinações é 10×10 ou 100; por outro lado, o numero das combinações favoraveis é 3×3 ou 9;

a probabilidade procurada é, pois, $\frac{9}{100}$ ou $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$, isto é, o quadrado da probabilidade simples para que saia uma esphera branca.

A probabilidade da sahida de duas espheras pretas seria analogamente $\frac{49}{100}$ ou $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10}$; a da sahida de uma esphera preta e de uma branca seria $\frac{21}{100}$ ou $\frac{3}{10} \times \frac{7}{10}$.

2.º *Qual é a probabilidade de tirar de um baralho de 32 cartas, um rei e em seguida uma dama, não devendo a primeira carta tirada entrar de novo no baralho?*

O numero das combinações possíveis será 32×31 , e o das combinações favoráveis de 4×4 ; a probabilidade procurada será pois, $\frac{4 \times 4}{32 \times 31}$ ou $\frac{4}{32} \times \frac{4}{31}$, isto é, o producto das probabilidades simples.

3.º *Consideremos o caso em que ha m espheras brancas e n pretas, em uma urna, m' brancas e n' pretas, em outra urna; qual é a probabilidade de tirar successivamente uma branca de cada uma das urnas?*

O numero de combinações é $(m + n)(m' + n')$; por outro lado, o das combinações favoráveis é mm' . A probabilidade é por conseguinte

$$\frac{m' m'}{(m + n)(m' + n')} \text{ ou } \frac{m}{m + n} \times \frac{m'}{m' + n'}$$

9. *Distribuição dos acontecimentos fortuitos.* — O theorema mais importante da theoria das probabilidades é o seguinte: *Embora os acontecimentos fortuitos sejam bastante numerosos, o acaso distribue-os equitativamente entre todos os casos possíveis sem favorecer nenhum.*

Nos paragraphos seguintes indicaremos como se distribuem os acontecimentos pela reiteração das provas.

10. *Distribuição de dois acontecimentos contrarios pela reiteração das provas.* — *Suppõe-se que sejam só possíveis dois acontecimentos contrarios; a probabilidade do primeiro é p, a do segundo é q; fazem-se p. provas; qual é a probabilidade do primeiro acontecimento se produzir n vezes, e do segundo n — p. vezes?*

Se a ordem segundo a qual os acontecimentos devem succeder-se estivesse estabelecida, a probabilidade procurada seria o producto de n factores eguaes a p e de $\mu - n$ eguaes a q , isto é, $p^n q^{\mu-n}$.

Ficando, porém, indeterminada a ordem, o acontecimento pode ser decomposto em tantos outros, de probabilidades eguaes, quantas as combinações possíveis de μ objectos dos quaes n são eguaes a A e $\mu - n$ a B . Este numero é

$$\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots n. 1.2.3 \dots (\mu - n)}$$

A probabilidade procurada é pois

$$\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots n. 1.2.3 \dots (\mu - n)} \frac{n^{\mu-n}}{p^n q^{\mu-n}}$$

que é o termo geral do desenvolvimento de $(p + q)^\mu$.
Ora, escrevendo

$$(p + q)^\mu = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2} q^2 + \dots + q^\mu$$

o primeiro termo representa a probabilidade para o acontecimento, cuja probabilidade é q , não se apresentar uma unica vez; o segundo, a probabilidade para que este acontecimento se produza uma vez; o terceiro, para que elle se dê duas vezes, etc. A somma dos k primeiros termos é a probabilidade para este acontecimento se produzir, quando muito $k - 1$ vezes em μ provas.

A somma de todos os termos exprime a probabilidade do acontecimento ter logar μ vezes, quando muito, isto é, a certeza; a somma dos termos é effectivamente egual á unidade, visto ser $p + q = 1$.

11. A probabilidade de um acontecimento é p , a do acontecimento contrario é q ; fazem-se μ provas nas mesmas condições. Qual é o grupo mais provavel?

E' aquelle em que o primeiro acontecimento succeder n vezes e o segundo $\mu - n$ vezes, se o termo geral do des-

envolvimento de $(p + q)^\mu$ fôr maior que o precedente e que o seguinte. Estes tres termos são

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2.3\dots(n+1)1.2.3\dots(\mu-n-1)} \frac{n+1}{p} \frac{\mu-n+1}{q}$$

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(\mu-n)} \frac{n}{p} \frac{\mu-n}{q}$$

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2.3\dots(n-1)1.2.3\dots(\mu-n+1)} \frac{n-1}{p} \frac{\mu-n+1}{q}$$

As relações do termo do meio para os dois outros

$$\frac{n+1}{\mu-n} \cdot \frac{p}{q}, \quad \frac{\mu-n+1}{n} \cdot \frac{p}{q}$$

são maiores que a unidade se

$$p\mu - q < n < p\mu + p$$

Sendo 1 a diferença dos dois limites de n , ha apenas um valor possível de n ; o grupo mais provavel é aquelle para o qual $n = p\mu$, $\mu - n = q\mu$, se $p\mu$ e $q\mu$ forem numeros inteiros.

Nos outros casos, a combinação mais provavel é aquella para a qual a relação dos numeros de producção dos dois acontecimentos simples é tão proxima quanto possível da relação das suas probabilidades.

Nos paragraphos seguintes vamos suppôr que n e $\mu - n$ teem respectivamente por valores $p\mu$ e $q\mu$.

12. Probabilidade do acontecimento mais provavel. — Esta probabilidade maxima é

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2.3\dots\mu p.1.2.3\dots\mu q} \frac{\mu p}{p} \frac{\mu q}{q}$$

Substituindo os productos $1.2.3\dots\mu$, $1.2.3\dots\mu p$,

1.2.3.... μq , pelos valores approximados que dá a fórmula de Stirling

$$1.2.3.... n = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$$

resulta

$$\frac{\frac{n^{\mu p}}{e^{\mu p}} \sqrt{2\pi \mu p} \cdot \frac{n^{\mu q}}{e^{\mu q}} \sqrt{2\pi \mu q}}{\frac{n^{\mu p}}{e^{\mu p}} \sqrt{2\pi \mu p} \cdot \frac{n^{\mu q}}{e^{\mu q}} \sqrt{2\pi \mu q}}$$

que se reduz, visto ser $p + q = 1$, a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \mu p q}} \dots \dots \dots (1)$$

Esta probabilidade, a maior de todas, contém $\sqrt{\mu}$ como divisor. Tende para zero quando o numero de provas augmenta.

13. Probabilidade de um dado desvio. — Procuremos o valor approximado do termo no qual o expoente de p é $\mu p - h$, suppondo este termo muito proximo do termo ma-

ximo para que $\frac{h}{\mu}$ e até $\frac{h}{\sqrt{\mu}}$ sejam pequenos.

A expressão exacta é

$$\frac{1.2.3.... \mu}{1.2.3.... (\mu p - h) \cdot 1.2.3.... (\mu p + h)} \frac{\mu p - h}{p} \frac{\mu q + h}{q}$$

A fórmula de Stirling reduz esta expressão a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \mu p q}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{h}{\mu p}\right)^{\mu p - h + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h}{\mu q}\right)^{\mu q + h + \frac{1}{2}}}$$

Tem-se, desprezando $\frac{1}{\mu^3}$

$$\log \left(1 - \frac{h}{\mu p} \right)^{\mu p - h + \frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mu p - h + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{h}{\mu p} - \frac{h^2}{2 \mu^2 p^2} \right)$$

$$\log \left(1 + \frac{h}{\mu q} \right)^{\mu q + h + \frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mu q + h + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{h}{\mu q} - \frac{h^2}{2 \mu^2 q^2} \right)$$

e por conseguinte approximadamente

$$\log \left(1 - \frac{h}{\mu p} \right)^{\mu p - h + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h}{\mu q} \right)^{\mu q + h + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{h^2}{2 \mu} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{2} \frac{h}{\mu} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$$

e como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq}$$

resulta

$$\left(1 - \frac{h}{\mu p} \right)^{\mu p - h + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h}{\mu q} \right)^{\mu q + h + \frac{1}{2}} =$$

$$= e^{\frac{h^2}{2 \mu p q}} e^{\frac{h}{2 \mu} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)}$$

Se $\frac{h}{\mu}$ fôr muito pequeno, o segundo factor differe muito pouco da unidade, e a probabilidade procurada, é pouco mais ou menos

$$\frac{1}{\sqrt{2 \pi \mu p q}} e^{-\frac{h^2}{2 \mu p q}} \dots \dots \dots (2)$$

Se, pelo contrario, h^2 fôr um pouco maior em relação a μ , este primeiro factor é extremamente pequeno e a probabilidade é inapreciavel.

Por estes motivos, adopta-se sempre a fórmula anterior para valor sufficientemente approximado da probabilidade de um desvio h , isto é, da differença entre o numero de aparições do primeiro acontecimento em um caso qualquer e no caso mais provavel.

A comparação das fórmulas (1) e (2) mostra que, se h fôr da ordem de $\sqrt{\mu}$, ou de ordem inferior, a relação da probabilidade do desvio h para a probabilidade maxima é proxima da unidade. Se, pelo contrario, h exceder muito $\sqrt{\mu}$, esta relação é muito pequena. Logo, os acontecimentos mais provaveis acham-se grupados em volta do mais provavel de todos.

14. Probabilidade de um desvio inferior a um numero dado — Theorema de Bernoulli. — No paragrapho precedente, h toma valores inteiros. Para mais commodidade, convem dizer que a probabilidade de um desvio comprehendido entre z e $z + dz$, é

$$\frac{1}{\sqrt{2 \pi \mu p q}} e^{-\frac{z^2}{2 \mu p q}} dz$$

Admittindo este modo de exprimir, a probabilidade do desvio h é substituida pela somma das probabilidades dos

desvios compreendidos entre dois numeros y e $y + 1$, entre os quaes se acha o numero h ; esta somma é

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_y^{y+1} \frac{e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}}{e^y} dz - \frac{h^2}{2\mu pq}$$

Sabe-se que este integral differe pouco de e . Não haverá, pois, inconveniente em introduzir assim a variavel continua z . Além d'isso, embora h não possa exceder μ , faremos variar z de $-\infty$ a $+\infty$. O pequeno valor da exponencial, quando z exceder μ , torna tambem esta convenção sem inconveniente na prática.

A probabilidade de um desvio comprehendido entre $-\alpha$ e $+\alpha$ é então

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}}{e^z} dz$$

Fazendo

$$\frac{z}{\sqrt{2\mu p(1-p)}} = t$$

a expressão transforma-se em

$$\theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu p(1-p)}}} \frac{e^{-t^2}}{e^t} dt \dots\dots\dots (3)$$

a qual traduz um theorema notavel devido a J. Bernoulli, que se pode enunciar da seguinte maneira: *Sendo p a probabilidade de um acontecimento E, a probabilidade para que se apresente um numero de vezes comprehendido entre $1 - \alpha$ e $1 + \alpha$ em uma serie de μ provas é dada pela fórmula (3).*

Esta expressão é muito proxima da unidade para valores de $\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu p(1-p)}}$ proximos de 3, como mostra a tabella seguinte calculada por Kramp

$\theta(0)$	$= 0,000000$
$\theta(0,5)$	$= 0,520499$
$\theta(1,0)$	$= 0,842700$
$\theta(1,5)$	$= 0,966105$
$\theta(2,0)$	$= 0,995322$
$\theta(2,5)$	$= 0,999598$
$\theta(3,0)$	$= 0,999978$
$\theta(3,1)$	$= 0,999992$
$\theta(3,2)$	$= 0,999998$
$\theta(3,3)$	$= 0,999999$
.	
.	
.	
.	
$\theta(\infty)$	$= 1,000000$

Para α infinito, a expressão (3) torna-se, como vemos, egual a 1.

Pela fórmula (1) o desvio zero, isto é, o acontecimento mais provavel, é infinitamente pouco provavel. Pela formula (3) a probabilidade do desvio, não excedendo α , tende para zero com $\frac{1}{\mu}$. Logo, quando μ augmentar indefinidamente, o desvio absoluto angmenta provavelmente sem limite, mas o desvio relativo, ou a relação do desvio para o numero de provas, tende para zero.

15. Generalisação do theorema de Bernoulli. — O theorema de Bernoulli é applicavel ao caso em que os acontecimentos possiveis, em cada prova, são em numero qualquer.

Representando por $p, q, r, s, \dots$ a probabilidade de

cada um d'elles, o acontecimento composto mais provavel nas m provas, é formado de pm repetições do primeiro acontecimento simples, de qm repetições do segundo, de rm do terceiro, e assim por deante. Os termos do desenvolvimento $(p + q + r + s + \dots)^m$ dispõem-se por ordem de grandeza nas proximidades do termo maximo, e pode-se ainda calcular o numero de provas, para o qual haverá uma probabilidade tão proxima da certeza quanto se deseje, que as relações dos numeros de repetições de cada acontecimento simples, para este numero de provas, apenas diffiram das probabilidades $p, q, r, s, \dots$ de uma pequena fracção.

A demonstração d'estas propriedades faz-se pelo processo que seguimos no caso de dois acontecimentos simples, mas as operações são muito mais complicadas.

16. Poisson tratou de procurar a lei segundo a qual os acontecimentos simples, *cujá probabilidade não é necessariamente constante durante a duração das provas*, se repetem em grande numero de provas, mas não chegou a obter a expressão rigorosa d'esta lei, a que deu o nome de *lei dos grandes numeros*. Entretanto conseguiu applicar o theorema de Bernoulli a este caso geral.

Para os usos práticos, pode-se concluir d'esta generalisação que se conhecermos os valores em relação aos quaes a probabilidade de cada um dos acontecimentos simples varia o mais regularmente possível em ambos os sentidos, o acontecimento composto mais provavel será aquelle em que os acontecimentos simples se acharem repetidos numero de vezes proporcionaes a estes valores.

17. *Applicação do theorema de Bernoulli aos phenomenos naturaes.* — Numerosos phenomenos naturaes são devidos á acção de uma causa constante que dá a cada um d'elles um valor determinado, e de consideravel numero de acções accessorias que modificam um tanto este valor.

Suppondo que cada uma d'estas acções produz uma modificação muito pequena, de grandeza determinada, susceptivel sómente de mudar de signal, o valor mais provavel será o que é devido, pura e simplesmente, á acção da causa constante; o desvio entre um acontecimento observado e o mais provavel, será medido pelo excesso do numero das modificações positivas sobre o das negativas; a probabilidade de um dado desvio será representada pelo theorema de Bernoulli.

18. *Theorema inverso do de Bernoulli.* — Consideremos

uma serie de experiencias nas quaes se tem observado m vezes um acontecimento s , cuja probabilidade p desconhecida, supponmos constante, e portanto o contrario terá tido logar $s - m$ vezes.

Com estes dados determinemos o valor mais provavel de p que designaremos por x . Suppondo resolvido o problema, anteriormente á execução das experiencias, a probabilidade para que os acontecimentos s e s' se apresentem respectivamente m e $s - m = n$ vezes, será

$$P = \frac{s!}{m! n!} x^m (1-x)^n$$

A cada valor que se attribua a x corresponderá a P_m outro, e a probabilidade P' de qualquer d'estas hypotheses, poderá determinar-se dividindo a probabilidade que esta hypothese dá ao acontecimento composto observado, que é o valor de P_m , pela somma das probabilidades que o mesmo acontecimento de todas as hypotheses, que serão os diversos valores de P_m correspondentes aos que x pode receber.

A probabilidade de um acontecimento qualquer deve estar comprehendida entre 0 e 1; logo x só poderá variar n'este intervallo. Teremos por conseguinte

$$P' = \frac{\frac{s!}{m! n!} x^m (1-x)^n}{\frac{s!}{m! n!} \sum_0^1 x^m (1-x)^n}$$

que se poderá transformar em

$$P' = \frac{x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx}$$

A hypothese mais provavel a respeito do valor de x , obtem-se achando o *maximum* de P' , e como o denomina-

dor é constante, bastará determinar o valor de x que torne maxima a expressão $z = x^m (1-x)^n$.

Segundo a regra geral para esta ordem de questões, egualemos a zero a derivada de z , o que dá

$$\frac{dz}{dx} = m x^{m-1} (1-x)^n - n x^m (1-x)^{n-1} = 0$$

d'onde, dividindo ambos os membros por $x^{m-1} (1-x)^{n-1}$, resulta

$$m(1-x) - n x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s}$$

Vemos, pois, que a hypothese mais provavel é a de tornar para valor da probabilidade x do acontecimento, a relação entre o numero de vezes que este acontecimento se realisou e o numero total de experiencias.

19. Jogos de azar. — O jôgo de azar é uma operação em que um ou varios individuos, chamados *jogadores*, estão sujeitos a esperar um lucro ou uma perda eventual. N'este ponto de vista, o seguro de vida é um jôgo.

Esperando um jogador certo lucro eventual, é justo que pague uma certa somma, denominada *entrada*, a qual deve estar em relação com a quantia que espera ganhar.

O jôgo é *equitativo* para um jogador, se depois de muitas *partidas* ou de provas, o lucro ou a perda média é muito pequena em relação á somma das entradas, e se alterando muito pouco as entradas no mesmo sentido, elle perde ou ganha forçosamente após grande numero de provas.

20. Esperança mathematica. — Quando a probabilidade de um jogador ganhar se conserva a mesma em cada prova, é facil de ver que a entrada do jogador deve ser igual ao que se chama *esperança mathematica*. Esta, em um jôgo equitativo, é, para cada jogador, igual á sua entrada que, entregue ao jôgo, nunca mais lhe pertence.

Esta egualdade traduz a definição: o jogador troca a sua entrada por uma *esperança mathematica*. Se essa equivalencia não existir, o jôgo não é equitativo.

A *esperança mathematica* de uma quantidade eventual

S , é o producto d'esta somma pela probabilidade p que tem de a ganhar.

Com effeito, se n pessoas tiverem eguaes direitos á quantia S , podem equitativamente dividil-a e tomar cada uma $\frac{S}{n}$, ou tiral-a á sorte e acceitar por quinhão a proba-

bilidade $\frac{1}{n}$ de obter S . Se alguns dos interessados, em numero m , se associarem, podemos offerecer-lhes equitativamente, quer a partilha, dando á sua associação $\frac{m S}{n}$,

quer a probabilidade $\frac{m}{n}$ de receber S .

Os dois offerecimentos são, pois, equivalentes.

21. D'estas considerações sobre a esperança mathematica, resulta a regra que deve servir de base ás apostas e aos jogos de azar, a saber: *os jogadores devem sempre, no principio do jogo, ter a mesma esperança mathematica.*

Se dois apostadores, tendo respectivamente a seu favor as probabilidades p e q , arriscarem as entradas P e Q , é necessario, para a aposta ser equitativa, que se tenha

$$p \times Q = q \times P$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$$

isto é, *as entradas devem ser proporcionaes á possibilidade de ganhar.*

Da proporção anterior deduz-se

$$\frac{P + Q}{P} = \frac{p + q}{p} = \frac{1}{p}$$

d'onde

$$P = (P + Q) p$$

e analogamente

$$Q = (P + Q) q$$

isto é, *o lanço de cada jogador deve ser igual á esperança mathematica que elle tem sobre o fundo do jogo.*

Dando á equação $p + Q = q + P$ a forma

$$p Q - q P = 0$$

e considerando as perdas como sommas *negativas*, o producto ($- q P$) da somma ($- P$) pela probabilidade q do lucro do segundo jogador, poderá entrar no cálculo da esperança mathematica do primeiro, a qual se formará então multiplicando o lucro ou a perda produzida por cada um dos acontecimentos possíveis, pela probabilidade d'este acontecimento, e dando ás perdas o signal $-$.

22. Uma vez começada a partida, os jogadores podem querer ultimal-a antes d'ella ter terminado; em tal caso não devem levantar a sua entrada, mas dividir a somma das entradas na proporção das probabilidades do lucro que elles teem em seu favor no momento em que a partida foi suspensa.

Além d'isso, é convenção geralmente admittida em todos os jogos, como dissemos, que o jogador perde a *propriedade* do dinheiro que deposita, mas adquire, em compensação, o direito de ganhar o capital do jôgo proporcional á probabilidade respectiva.

A regra da esperança mathematica, que se segue, ainda n'este caso toma aqui o nome de *regra dos partidos*.

Como exemplo d'esta regra, combinada com a das apostas, supponhamos que se pretende obter duas vezes a somma em dois lanços consecutivos de um dado de seis faces. Sendo a probabilidade d'este acontecimento $\frac{1}{36}$, e

a do acontecimento contrario $\frac{35}{36}$, deve o jogador entrar apenas com 1 fr., por exemplo, e o adversario com 35 frs.

Admittamos que a seguir ao primeiro lanço appareceu o ponto designado, querendo então os jogadores separar-se; o que apostou obter o ponto designado teria ainda, ao segundo lanço, um caso favoravel para si e sómente cinco contra. A sua esperança é, pois, differente da que tinha antes do primeiro lanço. Agora, como a entrada total fica pertencendo ao jôgo, todos os casos favoraveis igualmente possíveis teem um direito igual á partilha d'esta somma, e aquelle que reunir maior numero d'elles, deve ter as partes correspondentes; assim, o primeiro jogador guardará

a sexta parte da entrada, ou 6 frs., e o seu adversario, os $\frac{5}{6}$, ou 30 frs.

23. Quando as entradas P e Q de dois jogadores são proporcionaes ás probabilidades de ganho p , q , o acontecimento mais favoravel, depois de um certo numero de partidas, é que ninguem ganhou nem perdeu.

Isto resulta das considerações sobre a esperança mathematica e da hypothese

$$P \times q = Q \times p$$

Quanto maior fôr o numero de partidas, mais cresce a probabilidade de que as relações dos numeros de partidas ganhas por cada jogador para o numero total, ficarão proximas de p e de q . D'aquí resulta que multiplicando sufficientemente o numero d'ellas, a perda, ou o lucro, de cada jogador, poderá ser representado por uma fracção, tão pequena quanto se quizer, da entrada total (comprehendendo a somma de todas as entradas successivas).

Esta proposição apresenta uma das consequencias mais importantes na prática, da consideração da esperança mathematica. Mostrando a influencia que o numero de provas de um mesmo acaso tem sobre a perda ou o lucro que este acaso pode originar, mostra indirectamente que o tempo deve entrar na apreciação das eventualidades submettidas a uma probabilidade determinada.

O tempo permite, effectivamente, a repetição de acasos contrarios que se devem contrabalançar na relação d'esta probabilidade. E' prudente não se expôr, sem necessidade, ás consequencias de uma prova que se não pode tentar numerosas vezes, pois é impossivel n'esse caso apoiar-se sobre as probabilidades favoraveis.

24. *Paradoxo de S. Petersburgo. Esperança moral.* — Nicolau Bernoulli propoz um problema, que se tornou célebre, sob o nome de *problema de S. Petersburgo*. Eis o enunciado: Pedro e Paulo jogam nas seguintes condições: Pedro lança uma moeda; ficando com a effigie para cima, tem que dar 1 fr. a Paulo, se fica para baixo, tem que lançar de novo a moeda. Esta continuará a ser lançada até a effigie apparecer para cima, o que termina a partida. Tendo sido preciso deital-a n vezes, Paulo receberá 2^{n-1} francos.

Qual é a esperança mathematica de Paulo?

Paulo receberá, segundo o numero de lances que forem jogados, uma quantia egual a um dos termos da série

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

As probabilidades d'elle receber estas diversas sommas são

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$$

A esperança mathematica de Paulo é portanto

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots + 2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

isto é, compõe-se de um numero indefinido de termos eguaes a $\frac{1}{2}$.

Seja qual fôr o preço por que pague a promessa que lhe é feita, o contracto é vantajoso a Paulo.

Para explicar este paradoxo, a maior parte dos geometras recorreram á *esperança moral* (1), quer empregando,

(1) D. Bernoulli, que imaginou a noção de *esperança moral*, suppoz que o accrescimo de fortuna x de um individuo lhe conceder uma *vantagem moral* é avaliada por $k \frac{dx}{x}$, em que k designa uma constante; de modo que a fortuna d'este individuo passando do valor a ao de b

$$k \int_a^b \frac{dx}{x} = k (\log b - \log a)$$

será a sua *vantagem moral*, e designando por p a probabilidade d'este acontecimento, $pk \log \frac{b}{a}$ exprime a sua *esperança moral*, a qual se substitue á *esperança mathematica*.

como Lacroix, a hypothese de Daniel Bernoulli, quer fixando como Cramer, para maximo do lucro de Paulo, uma somma de tal modo grande, que se devesse considerar como absolutamente *inutil* tudo o que a ella se pudesse accrescentar.

Outros teem procurado limitar o numero de provas, fixando uma probabilidade muito grande $\left(\frac{9999}{10000}, \text{ por exemplo}\right)$ para que fôsse *moralmente certo* que a effigie apparecesse.

Poisson fez a observação de que Pedro não pode pagar mais do que tem, e que se possuisse 50 milhões, quantia exorbitante para um particular, não poderia lealmente continuar a prolongar o jôgo, além do vigesimo sexto lanço, pois ao vigesimo setimo a divida a Paulo, em caso de per-

da, seria 2^{26} francos, ou 67108864 francos, somma superior á sua fortuna.

Reciprocamente, Paulo, conhecendo a fortuna de Pedro, não jogará mais de 26 lanços.

Segundo Liagre, a esperança mathematica dos dois jogadores tem uma expressão mais complexa do que a indicada acima. De facto, cada um d'elles deve necessariamente desembolsar uma certa quantia, e por outro lado receber outra; é preciso, pois, ter em conta estas verbas no cálculo da sua esperança mathematica.

Seja X a entrada de Paulo; a sua esperança mathematica será

$$(1 - X) \frac{1}{2} + (2 - X) \frac{1}{4} + (4 - X) \frac{1}{8} + \dots + \\ + (2^{n-1} - X) \frac{1}{2^n} + \dots$$

e a de Pedro

$$(X - 1) \frac{1}{2} + (X - 2) \frac{1}{4} + (X - 4) \frac{1}{8} + \dots + \\ + (X - 2^{n-1}) \frac{1}{2^n} + \dots$$

Egualando estas duas expressões, acha-se

$$X = n \frac{2^n - 1}{2^n - 1}$$

quantidade que converge para $\frac{n}{2}$, á medida que n augmenta.

Ninguém arriscaria uma entrada de certa importancia nas condições estabelecidas.

25. Moralidade do jôgo. — Consideremos o jôgo n'outro ponto de vista, suppondo que, para o jogador, o fim é augmentar a sua fortuna.

Varios casos se podem apresentar. Consideremos em primeiro logar o jogador que expõe a sua fortuna a um jôgo propriamente dito, isto é, de sociedade: por exemplo, o bridge, o bluf, etc. Este jogador é pouco interessante; a perfeita honradez do seu lucro (se o realisa) é pelo menos duvidosa, e se elle joga repetidas vezes expõe-se á ruina.

Se as entradas de um jogador ficarem comprehendidas entre limites finitos, após grande numero de partidas, o seu lucro será igual á esperança mathematica augmentado ou diminuido de uma quantidade infinitamente pequena em relação a este lucro, mas que pode contudo crescer indefinidamente com o numero das partidas jogadas. Esta quantidade pode, além d'isso, passar várias vezes de positiva para negativa; tem tanta possibilidade de ser positiva como negativa, se, o que muitas vezes succede, a entrada do jogador fôr igual á sua esperança mathematica; com o tempo a parte infinitamente em relação á sua entrada, acabará por ser negativa e igual á sua fortuna, e n'esse caso elle ficará arruinado. Se, pelo contrario, a entrada fôr inferior á esperança mathematica, o que se dá com as pessoas que tem casas de jôgo, elle enriquecerá, é certo, mas de maneira pouco honesta. Se, finalmente, a entrada fôr superior á sua esperança mathematica, arruinar-se-ha ainda mais rapidamente do que se ella fôsse igual.

26. A ruina dos jogadores. — Mesmo quando o jôgo é equitativo, a ruina, cedo ou tarde, é certa.

A proposição parece contradictoria. Arruinando-se um dos jogadores, o jôgo enriquece o outro; expondo se a

perder uma fortuna, tem a esperança de a duplicar. Mas quando a fortuna duplicar, o theorema applica-se com a mesma certeza: ella pode duplicar ainda, centuplicar até, mas tudo será levado de uma vez por um capricho do acaso. Em quanto tempo? Ninguém o sabe; a probabilidade augmenta com o numero das partidas e converge para a certeza.

Luctando dois jogadores constantemente um contra o outro, quaesquer que sejam as condições do jôgo, um d'elles acaba por se arruinar. Effectuando dois jogadores, effectivamente, numerosas partidas, a probabilidade da distribuição mais provavel entre as partidas ganhas e perdidas por um d'elles, tende para zero quando o numero d'ellas augmentar. Se a probabilidade da combinação mais provavel tender para zero, o mesmo succede, e com maior razão, a qualquer outra combinação designada e, por conseguinte, tambem a um conjunto de combinações, qualquer que elle seja, cujo numero não cresceria indefinidamente com o numero das partidas. Quaesquer que sejam as entradas dos dois jogadores, pode-se designar uma distribuição das perdas e ganhos tal que a compensação seja perfeita, e que cada jogador, no fim, se ache com a sua fortuna primitiva.

Se, tomando como ponto de partida esta maneira de distribuição, augmentarmos o numero de partidas ganhas por um dos jogadores, o lucro será para elle, por cada partida ganha a mais, e portanto, por cada partida perdida a menos, igual á somma das duas entradas, e qualquer differença d'esta repartição que equilibre as perdas e os lucros, arruinará um dos jogadores, se, multiplicadas pela somma das entradas, der um producto superior á mais rica fortuna.

Caracterisando as combinações pelo numero total das partidas ganhas por um dos jogadores, o numero das que, não arruinando nenhum d'elles, permitem continuar o jôgo, é, pois, independente do numero das partidas jogadas, e a probabilidade para que qualquer d'estas combinações se produza, tende para zero quando o numero das partidas augmentar.

27. *Probabilidade das causas. Theorema de Bayes.* — No cálculo das probabilidades chamam-se *causas* aos accidentes que acompanham um acontecimento observado. Esta palavra não tem aqui nenhuma relação com a noção philosophica de causalidade.

Um dos theoremas em que se baseia o cálculo das pro

babilidades, é o seguinte, devido a Bayes: Se $p_1, p_2, p_3, \dots$ designarem as probabilidades que as causas $c_1, c_2, c_3, \dots$ de um acontecimento E estão em jôgo, excluindo-se estas causas mutuamente, e se $q_1, q_2, q_3, \dots$ exprimirem as probabilidades que as causas $c_1, c_2, c_3, \dots$ dão ao acontecimento E, a probabilidade que o acontecimento observado E é devido á causa c_i é

$$P = \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_m q_m}$$

O facto da causa c_i se ter produzido, e ter sido acompanhada de um acontecimento, é um acontecimento composto cuja probabilidade é $p_i q_i$.

Pode-se calcular esta probabilidade d'outra maneira.

A probabilidade de producção de um acontecimento acompanhada de uma qualquer das causas é

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_m q_m$$

Se o acontecimento se produz, a probabilidade d'elle estar ligado á causa c_i é, pois, um acontecimento composto cuja probabilidade é

$$P (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_m q_m)$$

Egualando as duas expressões d'esta probabilidade, vem

$$P = \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_m q_m}$$

O denominador é o mesmo para todos os valores de i , e as probabilidades das diversas causas são proporcionaes, por conseguinte, aos productos da probabilidade de cada uma, antes do acontecimento (q_i) pela probabilidade que dá ao acontecimento (p_i) quando a supponmos certa.

28. Applicaçào do theorema de Bayes. — Consideremos, por exemplo, uma série de urnas contendo a primeira a_1 espheras brancas e b_1 espheras pretas; a segunda a_2 , es-

pheras brancas e b_2 , espheras pretas, etc. Tire se uma esphera de uma d'estas urnas; uma pessoa que não tenha visto effectuar a tiragem, sabe que a esphera sahida foi a branca; qual é a probabilidade d'esta esphera sahir da primeira, segunda, etc. urna?

As probabilidades que a primeira, segunda, etc. urna dão *à priori* para a sahida de uma esphera branca, são respectivamente

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1}, \frac{a_2}{a_2 + b_2}, \dots$$

Sendo n o numero de urnas, $\frac{1}{n}$ é a probabilidade da escolha se effectuar em qualquer d'estas urnas; as probabilidades respectivas da esphera tirada sahir da primeira, segunda, etc. urna, são

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{a_1}{a_1 + b_1}}{\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \dots},$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{a_2}{a_2 + b_2}}{\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \dots}.$$

Theoria dos erros

29. Historia.—A theoria dos erros pode encontrar-se na *Opera Miscelanea de Côtes* (postuma), mas em uma memoria redigida por Simpson em 1755, acha-se ella pela primeira vez applicada á discussão dos erros de observação.

Laplace fez a primeira tentativa para deduzir uma re-

gra para combinar as observações segundo os principios da theoria das probabilidades.

30. Natureza dos erros. — Observando uma grandeza desconhecida podendo ser definida por um só numero, as differenças para este dos resultados das observações, chamam-se *erros verdadeiros*, ou simplesmente *erros* das observações.

Estes erros serão numeros qualificados para distinguir os dois sentidos differentes em que podem commetter-se, e é possível represental-os sobre uma linha, como é obvio; d'ahi lhes vem o nome de *lineares*.

Casos ha, porém, em que a grandeza desconhecida é complexa. Para determinar sem ambiguidade a natureza do desvio, cada observação deverá fornecer mais do que um numero, e haverá portanto erros não addicionaveis.

Succede isto, por exemplo, quando se procura a posição de um ponto no plano ou no espaço. Os desvios, ou erros completos, são então grandezas geometricas, para cuja representação não basta a segmentação de uma recta; é necessario fazer intervir, além da grandeza e sentido, um terceiro elemento, a direcção. Chamam-se *erros no plano* e *erros no espaço*.

Um primeiro reparo a fazer a respeito dos erros das observações, consiste em serem elles devidos quasi sempre a muitas causas differentes.

Chamando *erro elementar* ao proveniente de uma só origem, o da observação será a somma algebrica dos erros elementares, e pode n'este ponto de vista chamar-se *erro total*.

E' costume, attendendo ao modo como se exercem as diversas especies de causas, dividir os erros em duas classes, conforme são devidos a causas que actuam de um modo regular durante a série das observações, ou proveem, pelo contrario, de origens cuja acção depende de circumstancias que variam de observação para observação de uma maneira irregular, podendo considerar-se como acontecimentos independentes.

Aos erros pertencentes á primeira classe, dá-se o nome de *regulares*, ou *systematicos*, e comprehendem, como caso particular, os *erros constantes*. Os outros chamam-se *irregulares* e tambem *fortuitos* ou *accidentaes*. (1)

(1) Convém não interpretar estas denominações á letra, por-

Dizem-se erros accidentaes, ou irregulares, os devidos a causas variaveis em grandeza e que podem ter meios de existencia oppostos, o que faz que se produzam indifferentemente em um ou outro sentido.

Os erros constantes são devidos a causas permanentes em intensidade e modo de existencia, dando como resultado ter valores fixos em grandeza e sentido.

Chamam-se, finalmente, erros regulares, aquelles que, em cada série parcial, ou grupo de experiencias, satisfazem á definição dos erros constantes, mas que no conjunto dos grupos distinctos, ou séries, se produzem indistinctamente em um ou outro sentido.

Vê-se, pois, que estes erros devem considerar-se comprehendidos nos accidentaes, quando se multiplicar sufficientemente o numero de experiencias.

31. Probabilidade dos erros de amplitude dada. — Quando se mede uma grandeza, deveriamos, se os instrumentos fôsem perfeitos, achar o seu verdadeiro valor V ; mas na rea-

que o character verdadeiramente distinctivo d'estas duas especies de erros, é o conhecimento ou ignorancia da lei d'elles.

Facil é de ver por um exemplo classico o que ha de artificial n'esta classificação. Os erros resultantes da irregularidade de divisão de um instrumento de medição de angulos, deviam considerar-se systematicos, e são até constantes, quando o aparelho se emprega no mesmo lugar do limbo. Contam-se, porém, em regra como fortuitos, porque na medição de differentes angulos são empregados logares differentes do limbo.

A mesma origem de erros pode, pois, produzir erros systematicos e accidentaes, conforme as circumstancias; portanto a classificação não corresponde a uma distincção precisa entre as causas de erros. Mas considerados elles em si, isto é, independentemente das causas que os produziram, é importante notar que os erros irregulares gosam da propriedade de serem extremamente variaveis de observação para observação, podendo considerar-se como acontecimentos casuaes, o que lhes valem o nome de *fortuitos*.

Os erros systematicos desviam os resultados das observações do valor verdadeiro, quasi sempre no mesmo sentido, seguindo em cada caso uma lei particular. Não tem de commun nada que permita um estudo de conjunto, e necessitam por isso em cada genero de observações, e para cada natureza de cousas, um tratamento differente.

E' possivel abrangel-os em uma theoria geral, ao contrario do que succede com os erros accidentaes, que formam o objecto da *Theoria dos erros*.

lidade obtem-se um valor M , mais ou menos afastado de V ; a diferença de $M - V$ exprime o erro.

Concebe-se que nem todos elles teem a mesma frequencia, e que esta é uma funcção da sua amplitude, podendo-se tratar de determinar a lei segundo a qual ella depende.

Representando, em geral, por x o erro commettido na medida de uma grandeza, é evidente que a probabilidade de commetter um erro comprehendido entre 0 e x , augmentará com x , e será, pois, uma funcção F de x , dependendo do genero de observações ou experiencias que tenham dado esta medida.

Designando por p_x a probabilidade para que o erro fique comprehendido entre x e $x + dx$, em virtude do principio da probabilidade total, poderemos estabelecer a equação

$$F(x + dx) = F(x) + p_x \dots \dots \dots (1)$$

posto que o primeiro membro represente a probabilidade para que o erro fique comprehendido entre 0 e $x + dx$ e isto terá logar quando 0 esteja entre 0 e x , ou entre x e $x + dx$.

Da equação (1) deduz-se

$$p_x = F(x + dx) - F(x) = \varphi(x) dx \dots \dots \dots (2)$$

designando $\varphi(x)$ a derivada de $F(x)$.

Tendo em conta que dx é uma quantidade infinitamente pequena em relação a x , diremos que a fórmula (2) exprime a probabilidade de commetter um erro x em vez de dizer que é a de commetter um erro comprehendido entre x e $x + dx$.

O conhecimento da funcção $\varphi(x)$ permite determinar a probabilidade para o erro commettido em uma observação estar comprehendido entre dois numeros a e b , o que se verificará estando em alguns dos intervallos infinitamente pequenos em que podemos imaginar decomposto o considerado.

32. Representação graphica da probabilidade dos erros. — Pode-se representar graphicamente a probabilidade dos diversos erros. Assim, imaginemos que figuravamos as suas grandezas por abscissas marcadas a partir de uma origem O (fig. 1) sobre uma recta indefinida XX' , dividida em segmentos $OA_1, A_1 A_2, \dots OA'_1, A'_1 A'_2, \dots$ eguaes

entre si e muito pequenos; designemos por ε o seu comprimento commum. As extremidades dos segmentos que representam as amplitudes dos erros, caem nas diferentes casas; sejam

m_1	o numero dos que caem na casa	OA_1
m_2	»	»
.....		
n_1	»	»
n_2	»	»
.....		
N	o numero total das observações.	

Consideremos, sobre esta base, dois pontos A_q e A_{q+1} , correspondentes ás abscissas x e $x + \varepsilon$: a probabilidade p para que o erro fique comprehendido entre x e $x + \varepsilon$ será medida pela relação $\frac{m_q + 1}{N}$.

Representemos a probabilidade correspondente aos dois limites x e $x + \varepsilon$ construindo, sobre a base $A_q A_{q+1}$ um rectangulo cuja superficie seja igual a $p = \frac{m_q + 1}{N}$; repetindo esta operação para todos os segmentos, resulta um polygono em degraus, como mostra a fig. 1, que representa graphicamente a lei segundo a qual os erros se distribuem por todas as casas.

A area d'este polygono é igual á unidade, porque as areas parciaes são

$$\frac{m_1}{N}, \frac{m_2}{N}, \dots, \frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots$$

cuja somma é

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + n_1 + n_2 + \dots}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Tornando-se as casas infinitamente pequenas, o polygono tem por limite uma certa curva $y = f(x)$. A area d'esta curva, como a do polygono de que ella é o limite, é igual á unidade.

Os desvios grupam-se em tórno do valor verdadeiro em massas mais ou menos apertadas. A natureza d'este agrupamento constitue o que se chama a *repartição dos erros*.

33. Lei da distribuição dos erros. — A lei segundo a qual se distribuem os erros, depende da natureza das causas perturbadoras, e tem uma expressão diversa em cada caso particular. Ha contudo um caso muito geral em que ella pode ser estabelecida *à priori*: é aquelle em que as causas perturbadoras satisfazem ás tres condições seguintes: 1.º serem em numero infinito e cada uma d'ellas apenas exercer uma acção infinitamente pequena no resultado da medida; 2.º serem independentes umas das outras; 3.º poderem actuar indifferentemente n'um ou n'outro sentido. N'este caso, é facil estabelecer pela analyse a forma da funcção que representa a probabilidade para que um desvio fique comprehendido entre dois limites infinitamente vizinhos x e $x + dx$. Calcularemos o numero N total das combinações possiveis entre todas as fôrças que actuam tanto em um sentido como no opposto, e o numero n das combinações que determinam um desvio comprehendido entre os limites considerados; a relação d'estes dois numeros $\frac{n}{N}$, é a probabilidade procurada.

Esta relação, segundo foi demonstrado por Gauss, é expressa por uma funcção da forma (1)

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

fórmula onde h representa um coeſiciente constante denominado *index de precisão* ou *módulo de convergencia*, e cuja significação adeante daremos.

A curva que representa a distribuição dos erros, ou

(1) Como os valores positivos de x tem a mesma probabilidade que os valores negativos, $\varphi(x)$ deverá ser independente do signal de x , e annullar-se para qualquer valor de x excedendo os limites $\pm k$, sendo k o erro maximo que se pode commetter no genero de observação considerado.

Se, além d'isso, introduzirmos aqui a idéa de continuidade imposta pela representação da lei por meio da forma $\varphi(x)$, o erro x

curva das probabilidades, é, n'este sentido, expressa pela equação

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

Esta curva (fig. 2) é symetrica a respeito do eixo dos y e apresenta dois ramos asymptoticos ao eixo dos x .

Supponhamos o numero de causas perturbadoras indefinido, e cada uma d'ellas infinitamente pequena. Se na prática o seu numero fôr muito grande, actuando indifferen-temente em um sentido ou n'outro, e se cada uma d'ellas fôr tomada individualmente, não pode produzir-se senão um pequeno desvio, e a funcção que representa a probabili-

deverá passar por todos os estados de grandeza entre $-k$ e $+k$. Ha, pois, uma infinidade de erros possiveis.

Quando, sobre um numero m de observações, se reconhecer que ha p erros comprehendidos entre x e $x + \Delta x$, somos levados a calcular a probabilidade d'estes erros pela fracção $\frac{m}{p}$. D'ahi resulta que applicando a lei $\varphi(x)$, se terá, seja qual fôr m ,

$$\frac{p}{m} = \int_{-x}^{x + \Delta x} \varphi(x) dx$$

de sorte que a probabilidade de um erro absolutamente determinado x , é a quantidade infinitesimal $\varphi(x) dx$. Mas ao mesmo tempo, se extendermos o integral precedente a toda a escala dos erros, de $-k$ a $+k$, esta probabilidade será a certeza expressa pela unidade, de modo que devemos ter

$$\int_{-k}^{+k} \varphi(x) dx = 1$$

No caso de medidas repetidas de uma mesma grandeza, a média arithmetica representa o valor mais provavel da incognita, e os desvios das medidas isoladas comparados com a média, dão

dade de um erro comprehendido entre x e $x + dx$ afastar-se-ha pouco de um dos que são representados pela fórmula supra, e poderemos considerar, com exactidão sufficiente, que a lei da distribuição dos erros é expressa por uma funcção d'esta forma.

Satisfazendo as causas perturbadoras ás duas primeiras condições, isto é, se os seus effeitos individuaes forem infinitamente pequenos e independentes uns dos outros, mas em que a terceira condição não é satisfeita, isto é, que estas causas actuam mais fortemente em um sentido do que n'outro, eis o que succede: produzir-se-ha um desvio constante, podendo-se assimilar aos erros constantes e que se addicionará a todos os erros accidentaes; quanto a estes, distribuem-se sempre em tórno de um certo valor segundo a curva em forma de sino (*fig. 2*); sómente o eixo d'esta curva acha-se deslocado de uma grandeza correspondente á amplitude do erro systematico. Se finalmente as causas perturbadoras não satisfizerem de nenhum modo ás tres

approximadamente os erros $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ d'estas medidas. A somma d'estas, isto é $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \dots = 0$, é nulla, e se, por outro lado, $\varphi(\varepsilon)$ d ε representar a probabilidade do erro ε , $\varphi(\varepsilon')$ d ε' a do erro ε' , $\dots$ a probabilidade da appareição simultanea d'estes m erros será, pelo theorema de Moivre,

$$\varphi(\varepsilon) \cdot \varphi(\varepsilon') \cdot \varphi(\varepsilon'') \dots \dots \dots d\varepsilon^m$$

Para que os valores das incognitas correspondentes a este conjunto de desvios sejam os mais provaveis, é preciso que esta probabilidade seja maxima, isto é, que a sua derivada seja nulla. Tomando-a logarithmicamente, resulta

$$\frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \cdot \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{1}{\varphi(\varepsilon')} \cdot \frac{d\varphi(\varepsilon')}{d\varepsilon} + \frac{1}{\varphi(\varepsilon'')} \cdot \frac{d\varphi(\varepsilon'')}{d\varepsilon} + \dots \dots \dots = 0$$

Devendo ser esta condição identica á somma $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \dots = 0$, escreveremos, substituindo o symbolo geral x a $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = C x dx$$

condições acima enumeradas, esta distribuição dos erros poderá ser mais diversa da que foi formulada, não se podendo nada prever *a priori*.

34. Verificações experimentaes da lei de distribuição dos erros. — Podemos reconhecer em cada caso particular se a lei de distribuição dos erros é applicavel. Consegue-se de dois modos differentes: ou seja pela theoria, demonstrando que as causas perturbadoras satisfazem ás tres condições fundamentaes enunciadas no n.º 33, ou seja pela experiencia, reunindo grande numero de observações, e tratando de ver como ellas se grupam em tórno da média. Este segundo methodo é preferivel, porque não se pode nunca ter a certeza de ter analysado um phenomeno de modo que nenhuma causa de erro tenha escapado.

Bradley effectuou uma série de 470 observações para determinar a declinação de uma estrella, a qual se obtem

o que determina a forma da funcção. Integrando vem

$$\log \varphi(x) = \frac{C}{2} x^2 + C'$$

Como suppozemos $\varphi(x)$ nulla para x infinito, a constante $\frac{C}{2}$ é negativa; representando-a por $-h^2$, teremos

$$\varphi(x) = G e^{-h^2 x^2}$$

Determina-se G exprimindo que a probabilidade do erro que fica comprehendida entre $-\infty$ e $+\infty$ é a unidade, ou seja

$$G \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 1$$

o que dá $G = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, e portanto

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

por uma medida de angulo zenithal. Bessel discutiu estes resultados; contou o numero de desvios que ficavam comprehendidos entre $0''$ e $0'',4$, entre $0'',4$ e $0'',8$, e assim por diante até $4''$, finalmente os superiores a $4''$; reduziu todos estes numeros por uma proporção á hypothese de 100 observações unicamente; calculou em seguida pela theoria dos erros qual devia ser *a priori* a distribuição dos desvios, comparando-a com o resultado das observações. Eis as conclusões a que chegou:

Desvios	Distribuição segundo a obser- vação	Distribuição segundo a theoria
$0'',0$ a $0'',4$	22	19,5
$0'',4$ a $0'',8$	19,3	18,3
$0'',8$ a $1'',2$	18,3	16,2
$1'',2$ a $1'',6$	9,3	13,6
$1'',6$ a $2'',0$	9	10,6
$2'',0$ a $2'',4$	7,7	7,9
$2'',4$ a $2'',8$	3,3	5,5
$2'',8$ a $3'',2$	5	3,6
$3'',2$ a $3'',6$	2,7	2,2
$3'',6$ a $4'',0$	1,3	1,3
Acima de $4'',0$	2	1,4

Vê-se pois que a lei se verifica muito rigorosamente.

A applicação da theoria dos erros ás medidas de angulo effectuadas com o theodolito entrou na prática de muitos topographos, e os resultados permittiram realisar a perfeita concordancia d'esta theoria com a experiencia. Assim, com o theodolito, os desvios seguem a lei fundamental da distribuição. O mesmo succede com osapparelhos de nivelamento: a comparação de numerosas observações levou a estabelecer este facto de uma maneira precisa.

35. *Exemplo de casos em que a lei de distribuição é diferente.* — A lei de distribuição não se conserva a mesma para todos os instrumentos e methodos de observação.

Vimos ha pouco quaes as condições que deviam dar-se para que esta lei se applique; não sendo uma d'ellas satisfeita, se, por exemplo, uma das causas perturbadoras não fôsse infinitamente pequena, então, mesmo que os desvios

por ella produzidos occorressem indifferentemente em um ou outro sentido, a lei deixaria de se verificar.

Tomemos, como exemplo, um graphometro tendo apenas uma alidade e um nonio. Supponhamos que a alidade tem uma certa excentricidade. Se medirmos várias vezes um angulo A , o erro dependerá da orientação do limbo.

Designando por X (*fig. 3*) o angulo que forma a bissectriz de A com a linha que passa pelo centro da divisão e o de rotação da alidade, e por e a excentricidade, o erro será igual a

$$e = 2 e \cos X \sin \frac{A}{2}$$

Estes desvios são dos que podem ao acaso produzir-se n'um ou n'outro sentido; entre todos aquelles que tiverem uma dada amplitude, haverá tantos positivos como negativos. Eis, pois, bem o que se chamam erros accidentaes e comtudo elles não seguem a lei de distribuição apresentada no n.º 34.

Calculemos, com effeito, esta distribuição para um exemplo numerico. Suppondo a excentricidade igual a $\frac{1}{500}$, o angulo medido igual a 60° e o numero das observações igual a 1000, acha-se pela fórmula supra que a distribuição se faz do seguinte modo:

Amplitude dos desvios	Numero para 1000 observações
de 0' a 1'	92,9
» 1' a 2'	95,0
» 2' a 3'	99,5
» 3' a 4'	107,8
» 4' a 5'	123,1
» 5' a 6'	156,9
» 6' a 7'	324,8
	1000

A lei da distribuição representada graphicamente pela *fig. 4* é absolutamente diversa da que acima enunciamos: o polygono indicado na *fig. 4* não apresenta por forma al-

guma aspecto de curva em forma de sino. O mesmo succederá quando um dos phenomenos que produzem os desvios tem uma marcha oscillatoria.

Observando-se, por exemplo, o barometro, quando a atmosphera está submettida a leves movimentos ondulatorios, que se sobrepõem aos grandes movimentos geraes, os desvios entre várias pressões observadas em uma mesma época e a pressão média, seguirão uma lei de distribuição analogá á do caso precedente.

Não devemos applicar, pois, cegamente a lei estabelecida (n.º 33) a qualquer instrumento e a todos os phenomenos physicos. E' necessario estabelecer-a para cada caso particular por experiencias ou considerações theoricas.

36. Posição e pêso das observações. — Supponhamos que os instrumentos e methodos empregados sejam taes que a distribuição dos erros se effectue segundo a lei deduzida no n.º 33 e que a probabilidade para um d'elles ficar comprehendido entre os limites x e $x + \delta x$ seja representada pela fórmula

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2 x^2}{\delta x}}$$

Quanto maior fôr o coeﬃciente h , menos numerosos são os erros de grande amplitude. O coeﬃciente h augmenta, pois, com a precisão, e convem tomal-o como medida d'esta.

Chama-se *pêso* de uma observação o quadrado da precisão. Designando-o por p , tem-se $p = h^2$.

37. Principio da média. — Examinemos o caso mais simples, isto é, aquelle em que se mediu directamente uma grandeza x para a qual se obteem os valores $n, n', n'', \dots$ em numero m . Equivale a determinar x de maneira a satisfazer o melhor possivel ás m seguintes equações

$$\begin{aligned} x &= n \\ x &= n' \\ x &= n'' \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Se estas medidas forem apenas affectas de erros accidentaes, estes serão indifferentemente positivos ou negativos; além d'isso, os mais numerosos são os mais pequenos.

D'aqui resulta que tomando a média das medidas haverá uma larga compensação d'estes erros.

Se por acaso fôsse encontrado um erro grande (grande entre os limites admissíveis, bem entendido) que não se annullasse com outro erro igual e de signal contrário, seria, pelo menos, muito diminuido pelo divisor m do numero das equações. A equação resultante

$$x = \frac{n + n' + n'' + \dots}{m} \text{ ou } \frac{[n]}{m} \quad (1)$$

será, pois, muito mais exacta do que uma qualquer das propostas, tomada em particular, contanto que m seja um numero muito grande.

Depois d'isto, ficamos fazendo uma idéa muito approximada dos erros accidentaes que tiverem sido realmente commettidos em cada medida parcial se introduzirmos este valor de x nas equações. Estas não serão satisfeitas em rigor, deixando pequenos residuos $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ d'onde

$$\begin{aligned} x - n &= \varepsilon \\ x - n' &= \varepsilon' \\ x - n'' &= \varepsilon'' \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

em que x designa aqui o valor $\frac{[n]}{m}$.

E' facil de ver que a somma d'estes residuos é nulla, porque, substituindo x pelo seu valor, esta somma torna-se

$$\frac{n + n' + n'' + \dots}{m} - n + \frac{n + n' + n'' + \dots}{m} - n' + \dots$$

somma que se reduz evidentemente a zero.

(1) Gauss propoz representar as sommas taes como

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \end{aligned}$$

pelos symbolos $[a], [ab], [aa]$ e esta notação prevaleceu.

Posto isto, notemos que esta somma é a derivada (dividida por 2), em relação a x , da somma do quadrado dos erros

$$(x - n)^2 + (x - n')^2 + (x - n'')^2 + \dots$$

e visto ser esta derivada nulla, resulta que a somma dos quadrados dos erros é minima. Quer isto dizer que, qualquer outro valor que não seja a média $\frac{[n]}{m}$, substituído em vez de x nas equações propostas, produz uma somma de quadrados dos resíduos mais consideravel.

38. Erro médio quando o verdadeiro valor da grandeza observada é conhecido. — Tendo-se uma série de m medidas da mesma quantidade obtidas com menos cuidado e com instrumentos grosseiros, a somma dos resíduos relativos á média seria ainda nulla, mas a somma dos seus quadrados era maior. Pode-se pois considerar esta somma dos quadrados, reduzida ao minimo, como um meio de apreciar a precisão d'estas m medidas.

Logo, para conhecer a precisão de uma medida isolada, bastará tomar a média dos quadrados dos resíduos, isto é,

$$\frac{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \dots}{m} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$$

e extrahir-lhe a raiz quadrada. Esta média $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ dos quadrados dos erros observados, chama-se *erro médio* e costuma-se designar pela notação ε_1 .

Se o numero das observações augmentar indefinidamente, os erros distribuem-se segundo a lei conhecida, e o erro médio ε_1 tende para um certo limite que depende da precisão de h . Acha-se (1) que o valor de ε_1 é igual a $\frac{1}{h\sqrt{2}}$

e reciprocamente $h = \frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{2}}$.

(1) Faye, *Cours d'astronomie de l'Ecole Polytechnique*, Paris, 1881, 1^{ère} partie, p. 224.

Se o numero das observações fôr finito, a fórmula $\frac{1}{\epsilon_1 \sqrt{2}}$ já não exprime o verdadeiro valor da precisão, mas sómente o seu valor mais provavel.

39. Succede muitas vezes que a quantidade a determinar por meio de uma série de medidas não depende d'estas por uma relação tão simples como $x = n$, e até, no caso mais geral, haverá várias incognitas a determinar ao mesmo tempo, incognitas ligadas ás quantidades medidas por uma relação da forma

$$f(A, B, C, \dots t) = N$$

sendo t uma variavel independente, $A, B, C, \dots$ constantes independentes umas das outras, que entram na expressão analytica da lei, e N uma quantidade fornecida pela observação. Havendo m medidas $N, N', N'', \dots$ correspondendo a diversos valores $t, t', t'', \dots$ do argumento t , formaremos m equações da forma

$$\begin{aligned} f(A, B, C, \dots t) &= N \\ f(A, B, C, \dots t') &= N' \\ f(A, B, C, \dots t'') &= N'' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Appliquemos a este systema a regra precedente, isto é, tratemos de determinar as constantes desconhecidas $A, B, C, \dots$ por meio d'estas m equações (sendo m muito superior ao numero das referidas incognitas), de modo que a somma dos quadrados dos residuos, isto é,

$$[f(A, B, C, \dots t) - N]^2 + [f(A, B, C, \dots t') - N']^2 + \dots$$

seja minima.

Para isso, é necessario e sufficiente que as derivadas d'esta somma tomadas respectivamente em relação a $A, B, C, \dots$ (incognitas que supponhamos independentes umas das outras) sejam separadamente nullas.

Estas disposições de minimo fornecem-nos tantas equações finaes entre $A, B, C, \dots$ e $N, N', N'', \dots$ quantas as incognitas, systema que se resolveria pelos methodos conhecidos da algebra. Os cálculos seriam, porém, muitas

vezes, inextricaveis; felizmente as circumstancias ordinarias da prática permitem simplificar os consideravelmente pelo *metodo dos minimos quadrados*, adeante exposto.

40. Erro médio da somma algebrica de quantidades observadas. — Consideremos principalmente duas quantidades a e b , e a sua somma $S = a + b$. Sejam α_1 e β_1 duas medidas de a e b ; α_1 e β_1 os erros commettidos sobre a_1 e b_1 ; ε o que resulta para a somma $\varepsilon = \alpha_1 + \beta_1$ e portanto

$$\varepsilon^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2 \alpha_1 \beta_1$$

Considerando outros pares de observações $a_2, b_2; a_3, b_3, \dots$ e $\alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3; \dots$ os seus desvios, teremos identicamente

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2 &= \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2 \alpha_2 \beta_2 \\ \varepsilon''^2 &= \alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2 \alpha_3 \beta_3 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

e por conseguinte, effectuando a somma

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] + [\beta\beta] + 2 [\alpha\beta]$$

d'onde

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m} = \frac{[\alpha\alpha]}{m} + \frac{[\beta\beta]}{m} + 2 \frac{[\alpha\beta]}{m}$$

augmentando m indefinidamente. O primeiro termo $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$ tem por limite o quadrado do erro médio da somma $a + b$, $\frac{[\alpha\alpha]}{m}$ o quadrado do erro médio da medida de a e $\frac{[\beta\beta]}{m}$ o da de b . Quanto a $\frac{[\alpha\beta]}{m}$, vamos ver que tem por limite zero.

De facto, sabemos que o erro $-\alpha_p$ tem a mesma frequencia que $+\alpha_p$. Acharemos o mesmo numero de vezes a combinação de erros $(-\alpha_p + \beta_p)$ ou $(+\alpha_p - \beta_p)$ que $(+\alpha_p + \beta_p)$ ou $(-\alpha_p - \beta_p)$. Ora os duplos productos serão negativos nas duas primeiras combinações e positivos nas duas ultimas; a cada um dos duplos productos que figuram na somma, corresponderá outro igual e de signal

contrário, achando-se, pois, zero no total. Designando, por conseguinte, por ε_m , α_m e β_m os desvios médios, teremos

$$\varepsilon_m^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2$$

Se considerarmos agora uma somma de tres termos

$$S = a + b + c$$

podemol-a decompor em duas partes, a saber

$$S = (a + b) + c$$

O quadrado do erro médio da somma é igual á somma dos quadrados dos erros médios das parcelas.

Ora, o quadrado da que é relativa a $a + b$, é $\alpha_m^2 + \beta_m^2$. Designemos por γ_m o erro médio de c , obtem-se

$$\varepsilon_1^2 = (\alpha_m^2 + \beta_m^2) + \gamma_m^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2$$

Demonstra-se analogamente, de um modo geral, que para m observações $a, b, c, \dots, l$, teríamos

$$\varepsilon_1^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \dots + \lambda_m^2$$

41. Erro médio de uma função linear das observações — Consideremos primeiramente uma unica observação a e uma função linear d'esta quantidade Aa . Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ os erros observados sobre a ; os dos productos Aa serão $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_m$ e o erro médio será

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(A\alpha_1)^2 + (A\alpha_2)^2 + \dots + (A\alpha_m)^2}{m}} &= \\ &= A \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2}{m}} \end{aligned}$$

Ora, o radical exprime o erro médio α_m de a ; logo o erro médio procurado é igual a $A\alpha_m$.

Consideremos agora uma somma de m quantidades observadas

$$Aa + Bb + \dots + Ll$$

E' a somma de m parcelas cujos erros médios são respectivamente

$$A\alpha_m, B\beta_m, \dots, L\lambda_m$$

O erro médio da somma é, pois,

$$\sqrt{A^2 \alpha_m^2 + B^2 \beta_m^2 + \dots + L^2 \lambda_m^2}$$

42. Erro médio de uma função qualquer das quantidades medidas.—Seja $F(a, b, c, \dots, l)$ uma função qualquer das quantidades $a, b, c, \dots, l$, cujos desvios médios são $\alpha_m, \beta_m, \dots, \lambda_m$.

Supponhamos que em uma série de observações se cometeram, em cada uma d'estas quantidades, erros $\alpha, \beta, \dots, \lambda$; resultará para a função um erro

$$\varepsilon = F(a + \alpha, b + \beta, \dots, l + \lambda) - F(a, b, \dots, l)$$

Desenvolvendo pela série de Taylor, e limitando-a aos primeiros termos, vem

$$\varepsilon = \frac{dF}{da} \alpha + \frac{dF}{db} \beta + \dots + \frac{dF}{dl} \lambda$$

elevando ao quadrado

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left(\frac{dF}{da} \right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{dF}{db} \right)^2 \beta^2 + \dots + \\ & + 2 \frac{dF}{da} \cdot \frac{dF}{db} \alpha \beta + \dots \end{aligned}$$

Se tivermos m grupos de observações, e effectuando a somma dos quadrados dos erros taes como ε e dividindo por m , resulta

$$\begin{aligned} \frac{[\varepsilon \varepsilon]}{m} = & \left(\frac{dF}{da} \right)^2 \frac{[\alpha \alpha]}{m} + \left(\frac{dF}{db} \right)^2 \frac{[\beta \beta]}{m} + \dots \\ & + 2 \frac{dF}{da} \cdot \frac{dF}{db} \frac{[\alpha \beta]}{m} + \dots \end{aligned}$$

Os duplos productos desaparecem, visto serem eguaes dois a dois e de signaes contrários. As sommas $\frac{[\varepsilon \varepsilon]}{m}$, $\frac{[\alpha \alpha]}{m}$ etc., são os quadrados dos desvios médios. Logo

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{dF}{da}\right)^2 \alpha^2_m + \left(\frac{dF}{db}\right)^2 \beta^2_m + \dots + \left(\frac{dF}{dl}\right)^2 \lambda^2_m$$

43. Erro médio da medida arithmetica.—Podemos achar agora o erro médio que se commette quando tomamos para valor da incognita a média arithmetica das medidas que teem a mesma precisão.

Sejam $n_1, n'_1, \dots$ as observações, ε_1 o erro médio de cada uma d'ellas, e ε o da média arithmetica x .

$$x = \frac{n + n' + \dots}{m}$$

O erro médio d'estes diversos termos é $\pm \frac{\varepsilon_1}{m}$, logo o de x será

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \dots} \\ = \pm \sqrt{m \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2} = \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}} \end{aligned}$$

isto é, a precisão da média cresce como a raiz quadrada do numero das observações.

44. Erro médio quando o verdadeiro valor da grandeza medida é desconhecido.—Tomemos m vezes a medida de uma grandeza, adoptando para valor a média arithmetica

$$x = \frac{n + n' + n'' + \dots}{m}$$

Designemos por $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ os residuos, os quaes não são eguaes aos erros verdadeiros, visto não ser x o verdadeiro valor da incognita, mas differir d'elle de uma certa quantidade y . Os erros verdadeiros serão, pois,

$$\varepsilon + y, \varepsilon' + y, \varepsilon'' + y, \dots$$

e a média dos quadrados será

$$\frac{(\varepsilon + y)^2 + (\varepsilon' + y)^2 + (\varepsilon'' + y)^2 + \dots}{m}$$

que se reduz a

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon] + m y^2}{m}$$

por ser $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \dots = 0$

Tal é a expressão do quadrado do erro médio ε_1 .

Além d'isso, em virtude do que foi dito no numero precedente, o erro médio y sobre x é igual a $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$. Logo

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m} + \frac{\varepsilon_1^2}{m} = \varepsilon_1^2$$

ou

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m - 1}}$$

Esta fórmula, que dá o erro médio no caso de ser desconhecido o verdadeiro valor da quantidade medida, differe do que foi obtido no n.º 38 para erro médio, no caso em que o verdadeiro valor é conhecido; de facto, o denominador m da fracção que figura debaixo do radical, acha-se substituído por $m - 1$. (1)

45. Erro provavel.—Esta denominação, que não foi por certo muito bem escolhida, não designa, como se poderia julgar, o erro que mais probabilidade tem de se produzir.

Quando ha tantas probabilidades para que os erros excedam uma grandeza dada como para que lhe sejam inferiores, esta grandeza denomina-se ERRO PROVAVEL.

E' preciso notar que, por definição, o erro provavel não

(1) Por um raciocinio analogo veriamos que, no caso de i incognitas, se deve escrever

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m - i}}$$

é igual ao erro médio, mas sim proporcional. Pode-se, pois escrever

$$\eta = \mu \varepsilon_1$$

sendo μ um coefficiente igual a 0,6744897. (1)

Esta quantidade μ , proximamente igual a dois terços do erro médio, é o que se chama *erro provavel*.

46. Observações de desigual precisão. — Supponhamos que fizemos uma medida em duas épocas diferentes, a primeira vez por uma série de m observações, a segunda vez por uma série de m' da mesma precisão. Acharam-se os valores λ e λ' . Como devemos combinar estes resultados, que não podem ter a mesma probabilidade, visto ser m differente de m' ?

(1) A probabilidade para um erro ficar comprehendido entre μ e $+\mu$, é

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{e^{-h^2 x^2}}{e} dx$$

que é a relação do numero dos erros comprehendidos entre $-\mu$ e $+\mu$ para o numero total das observações.

Fazendo $hx = t$, e attendendo á definição de erro provavel, temos

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{e^{-t^2}}{e} dt$$

D'esta equação deduz-se pela tabella de Kramp

$$h\mu = 0,4769363$$

Por outro lado vimos (n.º 38) que $\varepsilon_1 = \frac{h}{\sqrt{2}}$

d'onde

$$\mu = \varepsilon_1 \times 0,6744897$$

Se repararmos nas observações primitivas, ellas apresentar-se-hão sob a forma

1. ^a série	2. ^a série
$\lambda = n$	$\lambda = N$
$\lambda = n'$	$\lambda = N'$
$\lambda = n''$	$\lambda = N''$
.....	
.....	
média $\lambda = \frac{[n]}{m}$	média $\lambda = \frac{[N]}{m'}$

Bastará tomar a média geral

$$\frac{[n] + [N]}{m + m'}$$

Substituamos n'esta expressão $[n]$ por $m \lambda$ e $[N]$ por $m' \lambda'$ o que dá

$$\frac{m \lambda + m' \lambda'}{m + m'}$$

Não é necessario, pois, tomar a simples média de $\frac{\lambda + \lambda'}{2}$ de λ e λ' , mas aquillo a que muito bem se podia chamar o *seu centro de gravidade*, suppondo pesos proporcionaes aos numeros de observações m e m' .

Mas geralmente, para combinar um certo numero de resultados $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ cujos pêsos respectivos seriam $p, p', p'', \dots$ é preciso multiplicar cada um d'elles pelo seu pêso, e dividir a somma d'estes productos pela somma dos pêsos. Escreveremos pois

$$\frac{p \lambda + p' \lambda + \dots}{p + p' + \dots} \text{ ou } \frac{p \lambda}{[p]}$$

O pêso d'este resultado será evidentemente $[p]$.

No exemplo precedente temos obtido immediatamente os pêsos dos valores $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ porque suppunhamos conhecidos os numeros de observações de igual precisão. Succede muitas vezes que estes numeros não são dados;

ha unicamente erros médios attribuidos pelos observadores aos seus resultados $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$. Designemos esses erros médios por $e, e', e'', \dots$ e imaginemos depois que o resultado λ provém da média de p observações affectas do erro médio E , e que λ' resulta igualmente de p' medidas da mesma precisão, e assim por diante. Bastará que os números $p, p', p'', \dots$ satisfaçam ás relações

$$e = \frac{E}{\sqrt{p}}, e' = \frac{E}{\sqrt{p'}}, e'' = \frac{E}{\sqrt{p''}}, \dots \quad (1)$$

Sendo E uma quantidade arbitrária, para reduzir a questão ao caso precedente, e ser auctorizado a escrever

$$\frac{p \lambda + p' \lambda' + p'' \lambda'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots} \text{ ou } \frac{[p \lambda]}{[p]}$$

o pêso resultante será $\frac{p + p' + p'' + \dots}{E}$ ou $\frac{[p]}{E}$ e o seu erro médio $\frac{E}{\sqrt{p + p' + \dots}}$ ou $\frac{E}{\sqrt{[p]}}$.

Assim, os valores a attribuir a $\lambda, \lambda', \dots$ estando apenas sujeitos a ser inversamente proporcionaes aos quadrados dos seus erros médios, podemos dispôr livremente da grandeza arbitrária E . Esta será o erro médio de uma d'estas $p + p' + \dots$ observações ficticias; mas como as relações (1) devem sempre ser satisfeitas, a grandeza E será tanto maior quanto maiores forem os numeros tomados para estes pêsos.

Esta quantidade arbitrária E tem o nome de *erro médio da observação ficticia* tendo por pêso a unidade, ou, mais brevemente, o *erro médio da unidade de pêso*.

47. Investigação dos erros systematicos. — Supponhamos que medimos m vezes uma quantidade cuja verdadeira grandeza v é conhecida e que se acharam os numeros $n, n', \dots$; os erros são

$$\begin{aligned} \varepsilon &= v - n \\ \varepsilon' &= v - n' \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

O erro compõe-se de duas partes, uma constante s , que representa o erro systematico, outra variavel a , que representa o erro accidental, a saber

$$\begin{aligned}\varepsilon &= s + a_1 \\ \varepsilon' &= s + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

ou, sommando as equações,

$$[\varepsilon] = ns + [a]$$

Designando por M a média das $\frac{[p]}{n'}$ observações $\frac{[n]}{m}$, teremos

$$mM - mv = (n - v) + (n' - v) + \dots\dots\dots = [\varepsilon]$$

Eliminando $[\varepsilon]$ entre estas duas equações e tirando o valor de s , vem

$$s = M - v = \frac{[a]}{m}$$

O valor mais provavel do termo $\frac{[a]}{m}$ é zero, e o do erro systematico é

$$s = M - v$$

Quanto ao desvio médio correspondente aos erros accidentaes, é

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[aa]}{m - 1}}$$

em um sentido, e outras no sentido opposto, e por isso procura-se attenuar o effeito d'elles multiplicando as observações de modo a formar equações de condição em numero muito superior ao das incognitas. Sendo os erros commettidos sobre $n_1, n_2, n_3, \dots$ umas vezes positivos, outras negativos, é possível combinar estas equações por forma que os erros de que estão affectadas se compensem em grande parte. Obtem-se então um resultado muito mais exacto do que se nos limitassemos a empregar o numero de medidas e de observações estrictamente preciso.

E' assim que, em certas questões, se empregam centenas ou até milhares de observações para afinal se calcular cinco ou seis incognitas.

49. Determinação de incognitas ligadas por equações dadas a quantidades medidas directamente. — Pela resolução prévia de k equações, ou por qualquer outro meio, conhece-se sempre valores $X_0, Y_0, Z_0, \dots$ das incognitas, sufficientemente proximos, que $x, y, z, \dots$ definidos pelas para equaldades

$$X = X_0 + x, Y = Y_0 + y, Z = Z_0 + z, \dots$$

considerados como pequenas quantidades de primeira ordem, se possam desprezar as ordens seguintes.

Substituindo, pois, estas relações em uma das equações (1), na 1.^a por exemplo, resulta

$$f, (X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \dots) = n_1$$

Desenvolvendo esta expressão pela fórmula de Taylor, segundo as potencias $x, y, z, \dots$ e desprezando os termos de ordem superior á primeira em relação a estas quantidades, resulta

$$f_1(X_0, Y_0, Z_0, \dots) + \frac{df_1}{dX_0} x + \frac{df_1}{dY_0} y + \frac{df_1}{dZ_0} z + \dots = n_1$$

equação linear em $x, y, z, \dots$, que se escreverá

$$a' x + b' y + c' z + \dots + n' = 0$$

designando n' a differença immediatamente calculavel

$$f_1(X_0, Y_0, Z_0, \dots) - n_1$$

Podemos assim substituir o *systema* das equações (1) por outro *systema* de equações do primeiro gráu em que os coefficients das incógnitas são dados exactamente, e os termos constantes determinados por medidas directas. Temos, pois, o *systema*

$$\left. \begin{array}{l} a'x + b'y + c'z + \dots + n' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + \dots + n'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + \dots + n''' = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Se o numero d'estas equações fôsse exactamente igual a k , nenhum meio teriamos para apreciar a exactidão das observações, nem dos valores obtidos para as incógnitas, resolvendo o *systema* (2). Mas, por hypothese, o numero das equações de condição é muito superior ao das incógnitas. Se as observações fôsssem perfeitas, as equações (2) seriam compatíveis e todas satisfeitas pelo mesmo e unico *systema* de valores $x, y, z, \dots$. Sendo as observações erroneas, os valores de $x, y, z, \dots$ seriam differentes se fôsssem determinados por tal ou qual *systema* parcial de k equações tomadas no *systema* (2).

Nenhum d'estes valores contraditorios pode ser tomado como verdadeiro, sendo até provavelmente todos falsos. Devemos considerar os verdadeiros valores das incógnitas como inacessíveis e adoptar os valores tornados mais provaveis para a totalidade das observações. D'estes valores adoptados deduzem-se os valores mais provaveis das observações em si.

50. *Valores mais provaveis das incógnitas ligados por equações lineares. Equações normaes.* — Dadas as equações (2) em que $n', n'', \dots$ são medidas directamente, e $a', a'', \dots, b', b'', \dots, c', c'', \dots$ etc., coefficients dados, e sendo o numero de equações muito grande em relação ao das incógnitas, trata-se de deduzir os valores mais provaveis de $x, y, z, \dots$.

Supponhamos primeiramente que as observações d'onde resultam $n', n'', \dots$ teem o mesmo pêsô. Os valores mais

prováveis de $x, y, z, \dots$ tornam minima a somma dos quadrados dos primeiros membros das equações (2), e annullam, portanto, as derivadas parciaes em relação a $x, y, z, \dots$

Designando por $v, v', v'', \dots$ os valores que tomam estes primeiros membros para estes valores de $x, y, z, \dots$, obteremos immediatamente as equações

$$[av] = 0 \quad [bv] = 0 \quad [cv] = 0 \dots$$

que se denominam *equações normaes*, e que escriptas explicitamente, são

$$\left. \begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots + [an] = 0 \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \dots + [bn] = 0 \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \dots + [cn] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots (3)$$

O numero d'estas equações normaes é igual ao das incognitas. A sua resolução fornece os valores mais prováveis de $x, y, z, \dots$ (1).

A formação d'estas equações é a parte mais laboriosa do methodo chamado dos *minimos quadrados*, quando o numero das equações é grande. Tambem é preciso proceder a verificações antes de proseguir no cálculo.

Eis um processo verdadeiramente simples.

Formemos as sommas $s', s'', s''', \dots$ dos coefficients das incognitas, em cada uma das equações (2), a saber.

$$\left. \begin{array}{l} a' + b' + c' + \dots = s' \\ a'' + b'' + c'' + \dots = s'' \\ a''' + b''' + c''' + \dots = s''' \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

(1) As equações normaes determinam $x, y, z, \dots$ se forem realmente distinctas. Mas tornando-se duas d'ellas identicas, depois de multiplicada uma d'ellas por uma constante, ha na realidade um numero de equações inferior de uma unidade ao das incognitas e o problema torna-se indeterminado.

Isto não resulta do methodo seguido na formação das equações

adicionemos estas igualdades membro a membro depois de as ter multiplicado respectivamente por $a', a'', a''', \dots$, por $b', b'', b''', \dots$, por $c', c'', c''', \dots$ e finalmente por $n', n'', n''', \dots$. Teremos

$$\left. \begin{aligned} [a a] + [a b] + [a c] + \dots &= [a s] \\ [a b] + [b b] + [b c] + \dots &= [b s] \\ [a c] + [b c] + [c c] + \dots &= [c s] \\ \dots &\dots \\ [a n] + [b n] + [c n] + \dots &= [n s] \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

As identidades (4) fornecem importantes verificações; devem ser satisfeitas quando os coeficientes das equações normaes forem calculados rigorosamente.

51. Resolução das equações normaes. — Para abreviar a escriptura, supponhamos que ha apenas quatro incognitas x, y, z, w . As equações normaes são

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{cc} aa & x \\ ab & x \\ ac & x \\ ad & x \end{array} + \begin{array}{cc} ab & y \\ bb & y \\ bc & y \\ bd & y \end{array} + \begin{array}{cc} ac & z \\ bc & z \\ cc & z \\ cd & z \end{array} + \begin{array}{cc} ad & w \\ bd & w \\ cd & w \\ dd & w \end{array} + \begin{array}{c} an \\ bn \\ cn \\ dn \end{array} \right\} = 0 \dots\dots (5)$$

O valor de x tirado da primeira d'estas equações é

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}w - \frac{[an]}{[aa]}$$

Substituamos este valor nas tres restantes equações (5)

normaes, mas da *natureza* das equações de condição dadas. N'este caso, são necessarias observações addicionaes de funcções novas, que forneçam equações distinctas das antigas, isto em virtude dos valores variados dos seus coefficientes e que façam assim desapparecer a indeterminação.

Quando ao effectuar-se a eliminação uma das incognitas se apresentar com um coeſſiciente tão pequeno que pequenos erros de observação o possam modificar consideravelmente, a indeterminação é ainda evidente e reclama novas observações.

e conservemos a symetria dos resultados pela notação devida a Gauss.

Façamos:

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] = [bb.1]$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]} [ac] = [bc.1]$$

$$[bd] - \frac{[ab]}{[aa]} [ad] = [bd.1]$$

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]} [an] = [bn.1]$$

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ac] = [cc.1]$$

$$[cd] - \frac{[ac]}{[aa]} [ad] = [cd.1]$$

$$[cn] - \frac{[ac]}{[aa]} [an] = [cn.1]$$

$$[dd] - \frac{[ad]}{[aa]} [ad] = [dd.1]$$

$$[dn] - \frac{[ad]}{[aa]} [an] = [dn.1]$$

tendo assim

$$\left. \begin{aligned} [bb.1] y + [bc.1] z + [bd.1] w + [bn.1] &= 0 \\ [bc.1] y + [cc.1] z + [cd.1] w + [cn.1] &= 0 \\ [bd.1] y + [cd.1] z + [dd.1] w + [dn.1] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

A presença do numero 1 é unicamente o que distingue a forma (6) da forma (5). A primeira das equações (6), dá

$$y = - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} w - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}$$

e a substituição d'este valor de y nas duas outras equações (6), fazendo previamente

$$[cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bc.1] = [cc.2]$$

$$[cd.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bd.1] = [cd.2]$$

$$[cn.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bn.1] = [cn.2]$$

$$[dd.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} [bd.1] = [dd.2]$$

$$[dn.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} [bn.1] = [dn.2]$$

resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} [cc.2] z + [cd.2] w + [cn.2] = 0 \\ [cd.2] z + [dd.2] w + [dn.2] = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (7)$$

A primeira d'estas equações dá

$$z = - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} w - \frac{[cn.2]}{[cc.2]}$$

e este valor de z substituindo na segunda equação (7), adoptando a notação

$$[dd.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} [cd.2] = [dd.3]$$

$$[dn.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} [cn.2] = [dn.3]$$

obtem-se

$$[dd.3] w + [dn.3] = 0$$

o que dá

$$w = - \frac{[dn.3]}{[dd.3]}$$

Em resumo, se adoptarmos a notação geral

$$[\beta \gamma . \mu] - \frac{[\alpha \beta . \mu]}{[\alpha \alpha . \mu]} [\alpha \gamma . \mu] = [\beta \gamma . (\mu + 1)]$$

onde α, β, γ , são tres classes de letras e μ um numero, teremos para determinar successivamente w, z, y, x , o seguinte systema de equações

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z + \frac{[ad]}{[aa]} w + \frac{[an]}{[aa]} &= 0 \\ y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]} w + \frac{[bn.1]}{[bb.1]} &= 0 \\ z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]} w + \frac{[cn.2]}{[cc.2]} &= 0 \\ w + \frac{[dn.3]}{[dd.3]} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Augmentando o numero das incognitas, o das quantidades auxiliares a calcular cresce rapidamente. Se contarmos os coefficients e os termos absolutos das equações normaes, o numero total das auxiliares é, para k incognitas

$$\frac{k(k+1)(k+5)}{6}$$

fórmula facil de demonstrar, e que dá o seguinte:

numero de incognitas .	1	2	3	4	5	6	7	8	9
» » auxiliares ..	2	7	16	30	50	77	112	156	210

FIM

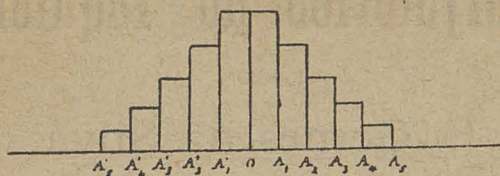


Fig. 1

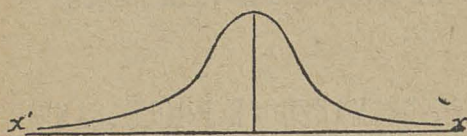


Fig. 2

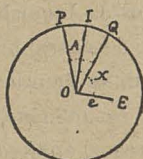


Fig. 3

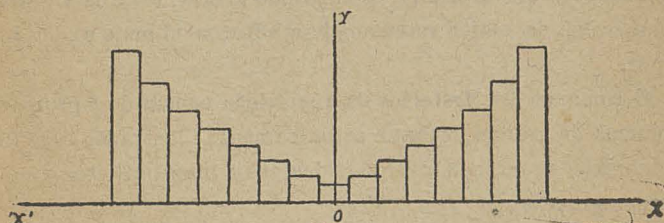


Fig. 4

Os Mystérios da Inquisição

POR

F. Gomes da Silva

Com esplendidas illustrações

DE

{MANUEL DE MACEDO E ROQUE GAMEIRO}

I

Sob o titulo **Os Mystérios da Inquisição** condensam-se variados factos historicos, desentranham-se os horrores d'epochas passadas, escarpellam-se figuras d'outros seculos, investigam-se particularidades estupendas, encadeiam-se acontecimentos dispersos e tenebrosos, enaltecem-se as grandes virtudes, faz-se rebrilhar a verdade, e põem-se em relêvo todas as personagens que entram n'este grande drama, em que vibram commoções da maior intensidade e affectos do mais exaltado amor.

O romance **Os Mystérios da Inquisição** consta de 3 grossos volumes de grande formato, artisticamente illustrados com 75 magnificas aguarellas, reproduzidas pelos mais perfectos e modernos processos.

Preço de cada volume, brochado, 1\$500 réis.

Elegantemente encadernados em percalina, com ferros especiaes, 800 réis mais cada volume.