PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

TRIGONOMETRIA

COM 12 FIGURAS

POR

JOÃO MARIA JALLES

Capitão de Artilheria

CADA VOLUME 50 RÉIS

18.ª Serie

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada,—e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

1887
DAVID CORAZZI—EDITOR
IMPRESA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de oiro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração:— 40, R. da Atalaya, 52 — Lisboa
Filial no Brazil:—38, R. da Quitanda, Rio de Janeiro

NUMERO
142

INDICE

Typ. das Horas Romanticas — Rua da Atalaya, 40 a 52, Lisboa

TRIGONOMETRIA

PRELIMINARES

Medir qualquer *grandeza* é comparál-a com uma segunda, escolhida para *unidade*, afim de conhecer quantas vezes uma se contêm na outra (*),—devendo, bem intendido, a escolhida para unidade ser do mesmo genero d'aquella que se deseja medir.

Assim é que, para conhecermos o pezo de qualquer objecto, teremos de comparál o com o pezo de um determinado corpo, —pezo que foi escolhido para unidade, e ao qual no systema metrico-decimal se convencionou dar o nome de *gramma*.

Pelo mesmo motivo, para conhecermos qualquer extensão, teremos de a comparar com outra extensão tambem devidamente escolhida, e conhecida pelo nome de *metro*.

Esta unidade - *metro* — tanto nos pode servir para medir as extensões em linha recta como em linha curva.

D'entre as linhas curvas ha, porêm, uma, cuja fórma regular, e cuja propriedade notavel e mui particular—de ter todos os seus pontos equidistantes de outro ponto no interior da figura por ella formada, ponto esse que tem o nome de *centro*,—mereceu mais especial attenção, e originou até uma nova maneira de medir todas as outras linhas curvas que satisfazem á mesma propriedade.

(*) Todos os leitores da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, apprenderam já certamente isto mesmo no vol. V, que trata da *Arithmetica Práctica*; mas não é ocioso lembrál-o aqui agora, para melhor poderem seguir o contexto d'este livrinho.

Referimo-nos aos *arcos de circulo*, e á *circumferencia*,—isto é, á linha curva que satisfaz á citada propriedade,—linha curva que toma o nome de *arco de circulo*, quando apenas represente uma parte incompleta da *circumferencia*.

N'esta nova maneira de medir estas linhas curvas, convencionou-se escolher uma unidade chamada *grau*, que se obteve dividindo a circumferencia em 360 partes eguaes.

A unidade *grau* foi convencionalmente dividida em 60 partes tambem eguaes, chamadas *minutos*; e cada um d'estes ainda se subdividiu em outras 60 partes tambem eguaes, a que se deu o nome de *segundos*.

Esta divisão da circumferencia é chamada *sexagesimal*. E n'ella se convencionou: indicar os *graus* pelo signal ^{0} posto pela parte superior do numero indicativo; servir o signal $'$ para indicar os *minutos*; e adoptar o signal $''$ para marcar os *segundos*. São tambem collocados estes signaes por sobre os algarismos do numero representativo das fracções do grau.

Assim, por exemplo, se quizermos escrever um numero representativo de um arco de 22 graus, 33 minutos e 44 segundos, teremos de escrever: 22^0, $33'$, $44''$; — o que realmente é muito mais expedito e mais proprio para intrar em qualquer calculo.

N'esta divisão sexagesimal a circumferencia tem pois 360 graus, ou 21:600 minutos, ou 1.296:000 segundos.

Não foi esta a unica divisão adoptada para a medição dos arcos de circulo. Depois d'esta divisão ter já uns creditos muito firmados, houve quem tentasse fazer adoptar outra maneira de dividir a circumferencia, divisão que era realmente mais racional; mas até hoje não tem sido adoptada, e continúa a vigorar a sexagesimal.

Como, porêm, houve livros em que a unica divisão adoptada era esta segunda, por isso a explicaremos aqui.

Chamava-se *divisão centesimal*; e a circumferencia era dividida em 400 partes eguaes, a que tambem se dava o nome de graus, ou mais propriamente *grados*, escrevendo-se por abreviatura *gr*.

Cada grau era dividido em 100 partes eguaes, cognominadas *minutos centesimaes*; e cada minuto d'esta divisão era ainda subdividido em outras 100 partes eguaes chamadas *segundos centesimaes*.

(Isto quanto temos vindo dizendo já foi tratado no vol. XXI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, quando se tratou da *Geometria plana*; mas intendemos necessario agora repetil-o para depois o desinvolvermos antes de o applicar á *Trigonometria*).

Tanto em um como em outro d'estes modos de dividir o circulo, se considera este dividido em quatro partes eguaes, ás quaes se dá o nome de *quadrantes*, partes que são comprehendidas entre dois diametros respectivamente perpendiculares.

Na divisão sexagesimal tem cada quadrante 90 graus; e na divisão centesimal tem 100 graus ou grados cada um dos mesmos quadrantes. Era realmente muito mais razoavel esta ultima maneira de dividir a circumferencia, mas taes fóros tinha já adquirido a primeira que não foi possivel desthronál-a.

A medição dos arcos originou outra medição de não somenos importancia; foi ella a apreciação exacta e facil do afastamento de duas linhas rectas que partindo de um ponto commum se conservam mais ou menos afastadas uma da outra. Isto é: a medição do arco deu a maneira de medir o angulo formado por duas linhas rectas.

O conhecimento, porêm, do valor dos arcos em graus, minutos e segundos, não dava mais do que a relação de qualquer arco para o valor total da circumferencia, e não nos dava o valor do arco expresso em unidades de extensão; pôde entretanto conseguir-se este resultado por intermédio de uma determinada relação conhecida em Geometria (*) pelo nome de *pi* e representada pela lettra grega π.

Esta relação π tem um valor incommensuravel, que foi calculado até 500 casas decimaes; mas ordinariamente na práctica toma-se como sufficiente $\pi = 3{,}1416$.

Em *Geometria* demonstra-se que o valor de uma circumferencia é dado pela fórmula $2\pi R$; e os valores dados por esta fórmula dependem unica e simplesmente do valor de R, que representa o raio do circulo que se considera, ou cuja circumferencia se pretende avaliar em metros.

Do valor da circumferencia se tira o valor de qualquer arco, porquanto basta multiplicar aquelle valor pela relação entre o numero de graus do arco, que se quer avaliar, e o numero total de graus do arco completo da circumferencia (isto é, 360 graus).

Assim, por exemplo, se quizessemos saber qual o comprimento de um arco de $35^{0},40'$ em uma circumferencia de 7^{m} de diametro, teriamos:

(*) Vid. vol. XXI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*.

Circumferencia $= 2\pi R = \pi \times 2R = \pi \times 7^m = 3{,}1416 \times 7^m = 21^m{,}9912$.

E portanto o comprimento do arco em questão sería:

$$\text{Comprimento do arco} = 21^m{,}99 \times \frac{35^0{,}40'}{360^0} = 21^m{,}99 \times \frac{2140'}{21600'}$$

$= 2^m{,}17$.

O modo de prácticamente medir os angulos no papel para se conseguir a resolução dos vários problemas de Desenho, Geometria, Trigonometria, Topographia, etc., é decerto bem conhecido.

Medem-se os angulos sobre o papel empregando um semicirculo graduado (fig. 1), que tem o nome de *transferidor*, e

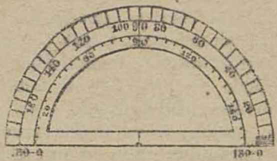

Fig. 1

cuja applicação nos parece desnecessario estar agora a ensinar, por ser decerto do dominio de quantos queiram ter conhecimentos como os que vamos procurar dar ácêrca do assumpto que se deve comprehender sob o titulo d'este livrinho.

A medição dos angulos no terreno não é tambem assumpto para este momento; e para os que quizerem saber qual o modo de os poder medir e avaliar aconselharemos a leitura de outro livrinho da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, onde especialmente se trata de *Topographia* (*), e onde se explica o uso dos *graphometros, alidades*, etc., que são os instrumentos usados para a medição de angulos no terreno.

Além dos preliminares indispensaveis que apontados deixamos, convirá ainda, antes de intrar em assumpto, dizermos como se consideraram *positivos*, ou *negativos*, os arcos e os angulos de qualquer grandeza, isto é, como se consideraram todos os diversos valores que podem tomar os arcos e os angulos.

(*) Vol. XCI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*.

Consideremos em uma circumferencia (fig. 2) um ponto A, origem do movimento de um qualquer movel M que se dirija de A pela circumferencia na direcção indicada pela flecha; e supponhamos ainda mais que o raio d'aquella circumferencia é egual á unidade.

O valor da circumferencia será, n'este caso, representado por 2π uma vez que $R = 1$ transfórma a fórmula $2\pi R$ em 2π.

O valor de meia circumferencia será a metade d'este valor ou $\frac{2\pi}{2}$ ou π: e ainda o valor de um quarto da circumferencia será a metade da semi-circumferencia ou $\frac{\pi}{2}$.

Isto é: se o movel tiver percorrido os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ABA'}$, $\overset{\frown}{ABA'B'}$, $\overset{\frown}{ABA'B'A}$, o valor de cada um dos arcos será respectivamente (representado-o por x):

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \pi, \qquad x = \frac{3}{2}\pi, \qquad x = 2\pi.$$

E, se quizessemos continuar a suppôr que o movel percorria novamente o mesmo caminho, poderiamos dar a x todos os valores que quizessemos até ao infinito.

Se em vez de considerarmos o movimento do movel em tal sentido, o considerassemos como realizando-se em sentido inverso (isto é, de A para B'), veriamos que os arcos seriam successivamente eguaes aos anteriores mas medidos em sentido inverso.

Ora para distinguir este differente sentido do movimento é que se convencionou usar os dois signáes $+$ e $-$ pelo seguinte modo.

Representando por a o valor do arco comprehendido entre A e M, arco que é exactamente egual ao comprehendido entre A e M', temos que:

No sentido de AM, diz-se:

$$x = +a$$

Quando no sentido de AM', diz-se:

$$x = -a$$

Estes valores podem seguir desde a origem 0 até $\pm \infty$, conforme já o dissemos para o caso positivo, quando o movel que suppuzemos em movimento não páre em M ou M',—mas sim continue a andar n'aquella circumferencia e dê uma, duas, tres, etc., voltas completas, ou quando não páre nunca, continuando o seu movimento infinitamente.

Se, em vez de considerarmos unica e simplesmente o movel M movendo-se na circumferencia, considerarmos o raio $O\ M$ que, movendo-se em-torno do centro, produzirá o angulo $M\ O\ A$, e se attendermos ás posições successivas que vai tomando, concluiremos que o angulo, comprehendido entre este raio e o raio $O\ A$, irá tomando todos os valores que dissémos para todos os arcos que considerámos.

Necessario portanto se torna aqui ponderar que em *Trigonometria* o *angulo* não tem de estar sujeito á condição de ser menor do que dois angulos rectos, como se costuma considerar em *Geometria* e em *Desenho*.

E, como a medida de qualquer angulo é dada tambem por comparação com uma unidade, poderemos escolher para unidade (visto que ha-de ser da mesma especie) o angulo que corresponda ao arco cuja extensão é egual á extensão do raio.

E, admittidas estas hypotheses, poderemos dizer que:

Qualquer angulo tem por medida o arco que lhe corresponde na circumferencia de raio *1*.

Havendo portanto *arcos positivos* e *negativos*, tambem poderá haver *angulos positivos* e *negativos*; e é d'este modo que os angulos entram nos calculos.

Poderemos saber qual seja o angulo que corresponde ao arco cuja extensão é egual ao raio, pelo seguinte calculo.

Em uma circumferencia de raio *1* o valor da circumferencia será:

$$2\pi = 2 \times 3{,}1416$$

Representando por n o numero de graus do arco egual ao raio, teremos (por ser a circumferencia dividida em 360 graus):

$$\frac{n}{360} = \frac{1}{2\pi}$$

Achando o valor de n (para o que multiplicaremos ambos os membros da egualdade por *360*), vem $n = \dfrac{1}{2\pi} \times 360$

$$n = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}1416} = 57{,}2957$$

ou : arco egual ao raio $= 57^{0}\ 17'\ 44''$

Completaremos estes preliminares dizendo o que se deve intender por arcos *complementares* e *supplementares*.

Dois arcos são chamados *complementares*, quando a sua somma é egual a um quadrante, isto é, a $\frac{\pi}{2}$.

Chama-se-lhes *supplementares* quando a sua somma é egual a π, ou egual a meia circumferencia.

Postos estes preliminares, poderemos já dizer que o fim da *Trigonometria* é: — *a resolução dos triangulos* (isto é, *o calculo dos elementos desconhecidos de um triangulo, quando dados tres, sendo um d'elles um lado pelo menos).*

Mas, antes d'isso, teremos de assentar em determinadas fórmulas que nos são muito necessarias para poder resolver triangulos.

LINHAS TRIGONOMETRICAS

Linhas trigonometricas ou *funcções circulares* são as quantidades conhecidas pelos seguintes nomes: — *seno, tangente, secante, coseno, cotangente* e *cosecante*. Seguidamente as passamos a definir:

1.º *Seno* de um qualquer arco $A M$ (fig. 3) é a quantidade positiva ou negativa que representa a perpendicular $M P$ baixada do ponto M, extremo do arco, sobre o diametro que passa pela origem A do mesmo arco. O seno representa-se geralmente no calculo pela abreviatura *sen*.

2.º *Tangente* trigonometrica de um qualquer arco $A M$, é a quantidade positiva ou negativa, que representa o segmento $A T$ da tangente tirada pela origem do arco e terminada pelo diametro que passa pela extremidade do arco. Representa-se tambem abreviadamente no calculo pelo seguinte modo: *tang* ou *tg*.

3.º *Secante* de um arco é a quantidade positiva ou negativa que representa a distancia $O T$ comprehendida entre o centro do circulo a que pertence o arco e a extremidade da tangente. Representa se no calculo pela abreviatura *sec*.

4.º *Coseno* de um arco $A\,M$ é o *seno* do complemento $B\,M$ d'esse mesmo arco. No calculo é representado pela abreviatura *cos.*

5.º *Cotangente* de um arco $A\,M$ é similhantemente a *tangente* do complemento do mesmo arco. Nos calculos usa-se exprimir abreviadamente da seguinte fórma: *cotang* ou *cot.*

6.º *Cosecante* de um arco é do mesmo modo a *secante* do complemento d'esse arco; e no calculo usa-se a abreviatura *cosec* para exprimir esta funcção circular.

Todas as linhas trigonometricas se podem exprimir por meio das linhas trigonometricas de um arco positivo menor que um quadrante ou 90 graus.

Esta maneira de exprimir as linhas trigonometricas é o que se chama: *reduzir todo e qualquer arco ao primeiro quadrante.*

Pela inspecção da fig. 3 vamos promptamente concluir as relações trigonometricas necessarias em conformidade com o que acabamos de dizer.

Mas, assim como já dissémos que havia *arcos* e *angulos* positivos e negativos, assim é tambem necessario agora dizer que as linhas trigonometricas podem ser positivas ou negativas.

Convencionou-se chamar positivas ás que correspondam aos arcos comprehendidos no primeiro quadrante, isto é, quando o arco está entre O e $\frac{\pi}{2}$.

Para os outros valores que os arcos podem tomar, serão as linhas trigonometricas positivas ou negativas conforme as linhas são ou não na mesma direcção e sentido das que correspondem aos arcos do primeiro quadrante.

Para bem se poder apreciar o que acabamos de dizer, supponhamos ainda na fig. 3 que inscrevemos o rectangulo $M\,N\,N'\,M'$, cujos lados são respectivamente parallelos aos dois diametros perpendiculares $A\,A'$ e $B\,B'$; e supponhamos que o ponto em vez de tomar a posição M vai para N, e depois para N' e ainda para M'.

Pela inspecção da figura logo vemos que:

1.º Sendo $N\,R$ e $M\,P$ duas rectas eguaes e do mesmo sentido, e sendo cada uma d'ellas (pela definição de *seno*) o seno dos respectivos arcos $A\,M$ e $A\,N$, temos:

$$\text{sen } A\,M\,N = N\,R = M\,P = \text{sen } A\,M$$

2.º Sendo $A\,S$ e $A\,T$ duas rectas eguaes e de sentido contrario, porque uma está para cima do diametro fixo $A\,A'$ e outra está para baixo, e sendo respectivamente as tangentes dos dois arcos em questão, teremos que

$$\text{tg } A\,M\,N = -A\,S = -A\,T = -\text{tg } A\,M$$

3.° Sendo $O\,S$ e $O\,T$ duas rectas eguaes e de sentido contrario, por estar uma no sentido do raio que descreve o angulo e outra no sentido opposto a esse raio, e pelas definições das secantes, temos:

$$\sec A\,M\,N = -O\,S = -O\,T = -\sec A\,M$$

4.° O coseno do arco $A\,M$ é representado pela linha $M\,P'$, ou (o que é o mesmo) pela linha $O\,P$; o coseno do arco $A\,M\,N$ é representado pela recta $O\,R$. D'aqui se vê uma vez que as duas rectas são eguaes e de sentidos contrarios:

$$\cos A\,M\,N = -O\,R = -O\,P = -\cos A\,M$$

5.° A cotangente do arco $A\,M$ é representada por $B\,T'$ e do mesmo modo a cotangente do arco $A\,M\,N$ é representada por $B\,S'$, sendo estas duas rectas eguaes e de sentido contrario. Portanto concluir-se-ha:

$$\cot A\,M\,N = -B\,S' = -B\,T' = -\cot A\,M$$

6.° A cosecante de $A\,M$ é representada por $O\,T'$; e a de $A\,M\,N$ é egualmente representada por $O\,S'$. Mas, como estas rectas são eguaes e do mesmo sentido, conclue-se facilmente que:

$$\text{cosec } A\,M\,N = O\,S' = O\,T' = \text{cosec } A\,M$$

Por identicos raciocinios se conclue que para o arco $A\,B\,N'$ se incontrarão as seguintes relações:

$$\text{sen } A\,B\,N' = -N'\,R = -M\,P = -\text{sen } A\,M$$

$$\text{tg } A\,B\,N' = A\,T = \text{tg } A\,M$$

$$\sec A\,B\,N' = -O\,T = -\sec A\,M$$

$$\cos A\,B\,N' = -O\,R = -\cos A\,M$$

$$\cot A\,B\,N' = B\,T' = \cot A\,M$$

$$\text{cosec } A\,B\,N' = -O\,T' = -\text{cosec } A\,M$$

Para o outro arco $A\,B\,B'\,M'$ se concluirá egualmente que os valores das suas linhas trigonometricas se poderão reduzir do seguinte modo aos valores do arco $A\,M$. Temos pois:

$$\text{sen } A B B' M' = - M' P = - M P = - \text{ sen } A M$$
$$\text{tg } A B B' M' = - A S = - A T = - \text{ tg } A M$$
$$\text{sec } A B B' M' = O S = O T = \text{ sec } A M$$
$$\text{cos } A B B' M' = O P = \text{ cos } A M$$
$$\text{cot } A B B' M' = - B S' = - B T' = - \text{ cot } A M$$
$$\text{cosec } A B B' M' = - O S' = - O T' = - \text{ cosec } A M$$

Se, para melhor podermos fixar e estudar estas conclusões, chamarmos x ao arco $A M$, teremos que respectivamente serão os arcos:

$$A M = x$$
$$A N = \pi - x$$
$$A B N' = \pi + x$$
$$A B B' M' = 2\pi - x$$

E por consequencia, fazendo as necessarias mudanças, apparecer-nos-ha

1.º

$$\begin{array}{ll} \text{sen} & (\pi - x) = + \text{ sen } x \\ \text{tg} & (\pi - x) = - \text{ tg } x \\ \text{sec} & (\pi - x) = - \text{ sec } x \\ \text{cos} & (\pi - x) = - \text{ cos } x \\ \text{cot} & (\pi - x) = - \text{ cot } x \\ \text{cosec} & (\pi - x) = + \text{ cosec } x \end{array}$$

2.º

$$\begin{array}{ll} \text{sen} & (\pi + x) = - \text{ sen } x \\ \text{tg} & (\pi + x) = + \text{ tg } x \\ \text{sec} & (\pi + x) = - \text{ sec } x \\ \text{cos} & (\pi + x) = - \text{ cos } x \\ \text{cot} & (\pi + x) = + \text{ cot } x \\ \text{cosec} & (\pi + x) = - \text{ cosec } x \end{array}$$

3.º

$$\begin{array}{ll} \text{sen} & (2\pi - x) = - \text{ sen } x \\ \text{tg} & (2\pi - x) = - \text{ tg } x \\ \text{sec} & (2\pi - x) = + \text{ sec } x \\ \text{cos} & (2\pi - x) = + \text{ cos } x \\ \text{cot} & (2\pi - x) = - \text{ cot } x \\ \text{cosec} & (2\pi - x) = - \text{ cosec } x \end{array}$$

Para considerarmos todos os valores devemos ainda attender ao caso dos arcos negativos. E por isso veremos pela inspecção da figura que, se o arco fôr $A\,M'$ egual a $(-x)$, serão respectivamente representadas pelas seguintes rectas as differentes linhas trigonometricas:

sen	pela recta	$M'\,P$
tg	»	$A\,S$
sec	»	$O\,S$
cos	»	$O\,P$
cot	»	$B'\,S''$
cosec	»	$O\,S''$

E, como estas rectas são respectivamente eguaes, com a competente differença de signaes, a estas outras, teremos:

$$\begin{aligned} M'\,P &= -M\,P \\ A\,S &= -A\,T \\ O\,S &= +O\,T \\ O\,P &= +O\,P \\ B'\,S'' &= -B\,T' \\ O\,S'' &= -O\,T' \end{aligned}$$

Ou fazendo a substituição pelo x, como fizemos para os positivos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\ (-x) &= -\text{sen}\ x \\ \text{tg}\ (-x) &= -\text{tg}\ x \\ \text{sec}\ (-x) &= +\text{sec}\ x \\ \text{cos}\ (-x) &= +\text{cos}\ x \\ \text{cot}\ (-x) &= -\text{cot}\ x \\ \text{cosec}\ (-x) &= -\text{cosec}\ x \end{aligned} \qquad (a)$$

Poderemos agora applicar estas fórmulas a qualquer caso, para exprimirmos as linhas trigonometricas de um arco em outras de outro arco menor do que um quadrante: sejam, por exemplo, as de um arco de -979 graus.

Começaremos por subtrahir d'este arco os multiplos de 360^0, que, como se disse já, nada influem no valor das linhas trigonometricas; e, como em 979 ha duas vezes 360 graus ou 720, poderemos exprimir d'este modo as linhas trigonometricas do arco -979^0

$$\begin{array}{llll}
\text{sen} & (-979) = \text{sen} & (-979+720) \\
\text{tg} & (-979) = \text{tg} & (-979+720) \\
\text{sec} & (-979) = \text{sec} & (-979+720) \\
\text{cos} & (-979) = \text{cos} & (-979+720) \\
\text{cot} & (-979) = \text{cot} & (-979+720) \\
\text{cosec} & (-979) = \text{cosec} & (-979+720)
\end{array}$$

ou, effectuando a operação:

$$\begin{array}{lllll}
\text{sen} & (-979) = \text{sen} & (-259) = -\text{sen} & 259 \\
\text{tg} & (-979) = \text{tg} & (-259) = -\text{tg} & 259 \\
\text{sec} & (-979) = \text{sec} & (-259) = +\text{sec} & 259 \\
\text{cos} & (-979) = \text{cos} & (-259) = +\text{cos} & 259 \\
\text{cot} & (-979) = \text{cot} & (-259) = -\text{cot} & 259 \\
\text{cosec} & (-979) = \text{cosec} & (-259) = -\text{cosec} & 259
\end{array}$$

como se conclue das fórmulas expressas na pag. 13 (a).

Mas no arco 259 graus ainda ha a considerar que este arco é egual a uma meia circumferencia e mais um resto (isto é: egual a $180^0 + 79^0$), e que portanto ainda se poderá fazer applicação das fórmulas designadas no grupo 2.º da pag. 12.

$$\begin{array}{lllll}
-\text{sen} & 259 = -\text{sen} & (180+79) = -(-\text{sen} & 79) \\
-\text{tg} & 259 = -\text{tg} & (180+79) = -(+\text{tg} & 79) \\
+\text{sec} & 259 = +\text{sec} & (180+79) = +(-\text{sec} & 79) \\
+\text{cos} & 259 = +\text{cos} & (180+79) = +(-\text{cos} & 79) \\
-\text{cot} & 259 = -\text{cot} & (180+79) = -(+\text{cot} & 79) \\
-\text{cosec} & 259 = -\text{cosec} & (180+79) = -(-\text{cosec} & 79)
\end{array}$$

Ou fazendo desapparecer o parenthesis, que haviamos posto para melhor fazermos conhecer a applicação, e lembrando que as quantidades entre parenthesis mudam de signal quando está o parenthesis precedido do signal —, teremos:

$$\begin{array}{llll}
\text{sen} & (-979) = +\text{sen} & 79 \\
\text{tg} & (-979) = -\text{tg} & 79 \\
\text{sec} & (-979) = -\text{sec} & 79 \\
\text{cos} & (-979) = -\text{cos} & 79 \\
\text{cot} & (-979) = -\text{cot} & 79 \\
\text{cosec} & (-979) = +\text{cosec} & 79
\end{array}$$

E assim teremos o arco reduzido ao primeiro quadrante; mas poderemos ainda reduzil-o a um outro arco menor do que 45^0, se nos lembrarmos, pelas definições de coseno, cotangente e cosecante, que estas linhas não são mais do que os senos, tangentes e secantes dos seus complementos, e portanto teremos ainda, e afinal:

$$\begin{array}{lll}
\text{sen} & (-979) = + \cos & 11 \\
\text{tg} & (-979) = - \cot & 11 \\
\text{sec} & (-979) = - \text{cosec} & 11 \\
\cos & (-979) = - \text{sen} & 11 \\
\cot & (-979) = - \text{tg} & 11 \\
\text{cosec} & (-979) = + \sec & 11
\end{array}$$

Isto é, sempre se pode reduzir o caso a exprimir as linhas trigonometricas de qualquer arco pelas de um outro arco menor que 90^0 ou $\frac{\pi}{2}$ e até mesmo menor do que 45 graus, como acabamos de o fazer.

E para terminarmos quanto temos a dizer sobre *linhas trigonometricas* definiremos ainda as duas seguintes linhas:

Seno-verso de um arco AM é a porção AP comprehendida entre a origem A dos arcos e o pé P do seno do arco, e representa-se abreviadamente no calculo por *sen-vers.*

Coseno-verso é o seno-verso do complemento do arco AM (isto é, do arco BM) e representa-se abreviadamente por *cos-vers.*

VARIAÇÃO DAS FUNCÇÕES CIRCULARES

Para determinarmos os limites das variações das linhas trigonometricas, supponhamos na fig. 3, que o movel M, que considerámos como tendo partido da origem A, se movia no sentido positivo, afastando se indefinidamente da origem.

Pela figura vê-se claramente que, quando o arco é zero, as linhas trigonometricas teem os seguintes valores:

$$\begin{array}{ll}
\text{sen} & 0 = \lim MP = 0 \\
\text{tg} & 0 = \lim AT = 0 \\
\text{sec} & 0 = \lim OT = 1 \\
\cos & 0 = \lim OP = 1
\end{array}$$

porquanto, quando o ponto M se move para mais perto de A, as duas primeiras linhas vão successivamente diminuindo de comprimento, emquanto as duas ultimas vão augmentando e tendendo para o raio, que se considera egual a *1*, como no principio admittimos desde logo.

Para as outras duas linhas—cotangente e cosecante—bastará observarmos que, á medida que o ponto M se approxima de A, as linhas $B\,T'$ e $O\,T'$, que as representam, vão augmentando sempre de comprimento, e este augmento é tal que, quando o ponto M está muito proximo de A, já não se pode marcar o limite das linhas em questão, e portanto poder-se-ha dizer que para o valor *0* do arco será:

$$\text{cotg } 0 = \lim B\,T' = \infty$$
$$\text{cosec } 0 = \lim O\,T' = \infty$$

Se, em vez do movel se approximar, imaginarmos que se afasta, e tende para o ponto B, veremos bem claramente que o seno, a tangente e a secante, augmentam então de valor successivamente, emquanto o coseno, a cotangente e a cosecante, diminuem.

Considerando os valores extremos, isto é, quando o movel está em B, que é quando o angulo é egual a 90^0 ou $\frac{\pi}{2}$, poderemos escrever:

$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{tg } \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\text{sec } \frac{\pi}{2} = \infty$$

porque o seno tende para o raio $O\,B$, emtanto que a tangente e a secante augmentam indefinidamente.

As outras tres linhas trigonometricas serão:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cot g \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1$$

porque as duas primeiras teem como limite em B a menor distancia — zero — e a cosecante tem como limite o raio $O\ B$.

Da combinação d'estes valores das linhas trigonometricas dos arcos comprehendidos entre 0 e 90 graus ou $\frac{\pi}{2}$ se tiram as seguintes egualdades, que já são nossas conhecidas; o que é ainda mais uma prova de que os cosenos, as cotangentes e as cosecantes, são os senos, as tangentes e as secantes dos arcos complementares:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \cos\ 0 = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \cot\ 0 = \infty$$

$$\sec \frac{\pi}{2} = \operatorname{cosec} 0 = \infty$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\ 0 = 0$$

$$\cot g \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\ 0 = 0$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = \sec\ 0 = 1$$

D'estes valores extremos do arco comprehendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ se conclue, recorrendo ás expressões, que já indicámos, e por meio das quaes se reduz sempre um arco ao primeiro quadrante, que os valores limites de todas as linhas trigonometricas estão comprehendidos entre os extremos seguintes:

O seno varia entre estes dois limites: -1 e $+1$

A tangente entre: $-\infty$ e $+\infty$

A secante entre $\begin{cases} +1 \text{ e } +\infty \\ -1 \text{ e } -\infty \end{cases}$

O coseno entre: -1 e $+1$

A cotangente entre: $-\infty$ e $+\infty$

A cosecante entre: $\begin{cases} +1 \text{ e } +\infty \\ -1 \text{ e } -\infty \end{cases}$

N'um circulo de raio r serão então os valores, onde figura a unidade, substituidos pelo valor do raio do circulo correspondente.

RELAÇÕES ENTRE AS LINHAS TRIGONOMETRICAS DE UM MESMO ARCO

Já deixámos dito que, se representarmos por x um arco positivo AM menor do que um quadrante, serão as linhas trigonometricas respectivamente representadas (fig. 3) por:

$$\begin{aligned} MP &= \text{sen } x \\ OP &= \cos x \\ AT &= \text{tg } x \\ BT' &= \text{cotg } x \\ OT &= \sec x \\ OT' &= \text{cosec } x \end{aligned}$$

Nos tres triangulos rectangulos OPM, OAT e OBT, temos, por serem os quadrados das hypothenusas eguaes ás sommas dos quadrados dos cathetos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$$
$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$
$$\overline{TO'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BT'}^2$$

ou substituindo os valores d'estes lados dos triangulos pelas linhas trigonometricas expressas no arco x:

$$(*) \qquad \text{sen}\,^2x + \cos\,^2x = 1 \qquad (1)$$
$$1 + \text{tg}\,^2x = \sec\,^2x \qquad (2)$$
$$1 + \text{cotg}\,^2x = \text{cosec}\,^2x \qquad (3)$$

Mas, como os tres triangulos rectangulos são similhantes, por terem dois angulos eguaes em cada um d'elles, pode-se pela comparação dos lados de todos tres tirar as seguintes egualdades:

$$\frac{OP}{OA} = \frac{PM}{AT} = \frac{OM}{OT}$$

$$\frac{OP}{BT'} = \frac{PM}{OB} = \frac{OM}{OT'}$$

$$\frac{OA}{BT'} = \frac{AT}{OB}$$

ou substituindo pelas linhas trigonometricas do arco x, que são representadas pelos lados dos triangulos em questão, teremos:

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{\sec x}$$

$$\frac{\cos x}{\text{cotg}\,x} = \frac{\text{sen}\,x}{1} = \frac{1}{\text{cosec}\,x}$$

$$\frac{1}{\text{cotg}\,x} = \frac{\text{tg}\,x}{1}$$

(*) Por convenção escrevem-se assim os quadrados das linhas trigonometricas, quando se deveriam antes escrever, por exemplo: $\overline{\text{sen}\,x}^{\,2}$.

D'estas egualdades podem-se tirar as seguintes equações, passando respectivamente para o outro membro das egualdades as quantidades que estão do lado inverso, mas tendo o cuidado de não esquecer que as quantidades que estão a multiplicar passam a dividir, e vice-versa.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad (4)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad (5)$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad (6)$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1 \qquad (8)$$

Estas oito funcções podem considerar-se reduzidas apenas a cinco, porque tres d'ellas transformam-se nas outras, logo que se substituam os valores n'ellas expressos por outras linhas trigonometricas, como acontece com a seguinte:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

Substituindo o valor da *tg* e da *sec*, pelos valores dados pelas fórmulas (4) e (5), teremos:

$$1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ou

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ou

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

que é a primeira fórmula.

Fazendo o mesmo ás fórmulas (3) e (8), chegariamos a conclusões identicas; e por isso podemos concluir que as fórmulas que nos servem são unicamente as cinco indicadas por (1), (4), (5), (6), (7).

Estas varias relações deduzidas assim de um caso particular, como o da figura, são comtudo umas fórmulas geraes, porque subsistem para todos os valores que poderemos dar a x, attendendo a que as linhas trigonometricas sejam tomadas com os devidos signaes correspondentemente a quanto deixámos já dito no começo, quando tratámos do sentido e valor das linhas trigonometricas.

D'estas equações, que deixámos indicadas pelos numeros (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), e (8), pode-se pois, com toda a facilidade, tirar o valor de cinco quaesquer das seis funcções circulares, quando seja conhecida a sexta.

Se quizermos, por exemplo, exprimir o sen x e o cos x em funcção da tg x, tomaremos as duas equações (5) e (7) e tiraremos os valores procurados do seguinte modo:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

ou

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$$

Mas das fórmulas (2) e (3) tira-se o valor da secante e cosecante expresso na tangente, porque, sendo

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

será, extrahindo a raiz:

$$\sec x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{cosec} x = \sqrt{1 + \operatorname{cotg} x^2}$$

e portanto:

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$$

mas, como pela fórmula (8) é

$$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$$

temos que:

$$\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

ou quadrando

$$\text{cotg}\,^2 x = \frac{1}{\text{tg}\,^2 x}$$

e substituindo no valor de sen x vem:

$$\text{sen}\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{tg}\,^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{tg}\,^2 x + 1}{\text{tg}\,^2 x}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\text{tg}\,^2 x + 1}}{\sqrt{\text{tg}\,^2 x}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1 + \text{tg}\,^2 x}}{\text{tg}\, x}} = \frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{1 + \text{tg}\,^2 x}}$$

Isto é, os valores do seno e coseno veem expressos só na tangente pelas fórmulas:

$$\text{sen}\, x = \frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{1 + \text{tg}\,^2 x}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}\,^2 x}}$$

SENO OU COSENO DA SOMMA OU DA DIFFERENÇA DE DOIS ARCOS

Supponhamos (fig. 4) que a partir da origem A tomamos dois arcos $AM = a$, $AN = b$.

Abaixemos sobre OA as perpendiculares MP e NQ; tiremos o diametro NOH e a corda MN: levantemos MG perpendicular a NH e NI parallela a OA.

No triangulo rectangulo MIN teremos:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{NI}^2$$

E, segundo o que sabemos já relativamente a senos e cosenos, teremos:

$$\overline{MN}^2 = (MP - NQ)^2 + (OP - OQ)^2$$

ou substituindo pelos valores que dissémos representarem os arcos:

$$\overline{MN}^2 = (\text{sen}\ a - \text{sen}\ b)^2 + (\cos a - \cos b)^2$$

valor este que se realiza sempre, seja qual fôr a posição dos extremos dos arcos em questão.

Se nos lembrarmos pela *Geometria* (*) de que a corda MN é meia proporcional entre HN e GN, isto é, que

$$\frac{HN}{MN} = \frac{MN}{GN}$$

d'onde

$$\overline{MN}^2 = HN \times GN$$

e por ser GN (seja qual fôr a posição do ponto G) egual a $ON - OG$, temos que será

$$\overline{MN}^2 = HN \times (ON - OG)$$

e ainda por ser por hypothese o raio $= 1$ teremos

$$\overline{MN}^2 = 2(1 - OG)$$

Mas

$$OG = \cos (a - b)$$

e portanto

$$\overline{MN}^2 = 2[1 - \cos (a - b)]$$

e egualando os dois valores vem:

$$2[1 - \cos (a - b)] = (\text{sen}\ a - \text{sen}\ b)^2 + (\cos a - \cos b)^2$$

e fazendo as operações será:

(*) Vol. XXI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas.*

$$2 - 2\cos(a - b) = \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b - 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b$$

ou dando outra disposição:

$$2 - 2\cos(a - b) = \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b - 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b)$$

e por ser

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

e do mesmo modo

$$\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$$

teremos pois:

$$2 - 2\cos(a - b) = 1 + 1 - 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b)$$

d'onde:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (9)$$

que é a fórmula geral, e que tem sempre logar para todos os valores de a e de b, quer sejam positivos, quer negativos.

Para acharmos, pois, o valor de $\cos(a + b)$ não temos mais do que mudar o b em $-b$: o que dará, lembrando-nos do que atraz dissémos ácêrca dos valores dos senos e cosenos dos arcos negativos:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (10)$$

Ainda se na fórmula (9) substituirmos o arco a pelo arco $(a + \frac{\pi}{2})$ teremos:

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} b$$

ou ainda:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \qquad (11)$$

por serem respectivamente os arcos:

$$\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right) \text{ complemento do arco } (b - a)$$

e $$(a+\frac{\pi}{2}) \text{ complemento de } -a$$

E, como o seno de um arco é o coseno do seu complemento e vice-versa, teremos que da egualdade

$$\cos(a+\frac{\pi}{2}-b)=\cos(a+\frac{\pi}{2})\cos b+\operatorname{sen}(a+\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} b$$

se tira:

$$\operatorname{sen}(b-a)=\operatorname{sen}(-a)\cos b+\cos(-a)\operatorname{sen} b$$

d'onde em vista do valor dos signaes:

$$\operatorname{sen}(b-a)=-\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b$$

ou

$$\operatorname{sen}(b-a)=\operatorname{sen} b\cos a-\cos b\operatorname{sen} a$$

ou dando lhe outra fórma, para se poder melhor comparar com a equação (9), chamaremos b ao que é a, e inversamente, vindo a final a equação procurada:

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cos b-\cos a\operatorname{sen} b$$

E, se n'esta ultima fórmula mudarmos b em $-b$, virá:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b \qquad (12)$$

TANGENTE OU COTANGENTE DA SOMMA OU DA DIFFERENÇA DE DOIS ARCOS

Para obtermos tg $(a\pm b)$ em funcção de tg a e de tg b, basta dividir membro a membro as equações (12) e (10) ou (11) e (9), o que dará:

$$\frac{\operatorname{sen}(a\pm b)}{\cos(a\pm b)}=\frac{\operatorname{sen} a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen} b}{\cos a\cos b\mp\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}$$

d'onde, dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por (cos a cos b), vem:

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} \pm \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} \mp \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}$$

ou ainda:

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad (13)$$

Devendo intender-se que esta fórmula deverá ser desdobrada do seguinte modo, conforme se quizer a somma ou a differença:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Para termos o valor da cotangente, basta lembrar-nos que da fórmula (8), quando em vez de (x) se puzér (a), se póde tirar:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

e que portanto pela fórmula (13) se pode achar o valor da cotangente d'este modo:

$$\cot(a \pm b) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a \pm b)}$$

$$\cot(a \pm b) = \cfrac{1}{\cfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{1 \mp \dfrac{1}{\cot a \cot b}}{\dfrac{1}{\cot a} \pm \dfrac{1}{\cot b}}$$

d'onde se tira, multiplicando os dois termos do quebrado do segundo membro por ($\cot a \cot b$):

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$$

fórmula que se desdobra tambem como a outra, devendo os signaes ser tomados sempre juntamente, ou todos os superiores, ou todos os inferiores.

FORMULAS DERIVADAS

Fazendo a egual a b nas equações (10), (12) e (13), acharemos então os seguintes valores:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \tag{14}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \tag{16}$$

expressões estas que nos dão os valores dos senos, cosenos e tangentes de um arco, expressos nos valores dos senos, cosenos e tangentes do arco sub-duplo.

Quando substituirmos na fórmula (14) a por $\frac{1}{2}a$, apparecer-nos-ha:

$$\cos a = \cos^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

Mas como

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

poderemos sommar estas duas equações membro a membro, e teremos:

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

ou

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a$$

Se tivessemos diminuido, achariamos:

$$1 - \cos a = \cos^2 \frac{1}{2} a - \cos^2 \frac{1}{2} a + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

ou

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

ou ainda dividindo por 2 e extrahindo a raiz quadrada a cada uma das equações

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a$$

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$$

nos apparecerão as seguintes fórmulas:

$$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \cos \frac{1}{2} a \tag{17}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \text{sen}\ \frac{1}{2}\ a \qquad (18)$$

Dividindo ainda estas equações uma pela outra, acha-se:

$$\text{tg}\ \frac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos a}{2}}{\frac{1+\cos a}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

isto é:

$$\text{tg}\ \frac{1}{2}\ a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad (19)$$

fórmulas estas que nos dão os valores dos senos, cosenos, e tangentes de um arco, em funcção do coseno do arco duplo.

SOMMA OU DIFFERENÇA DAS RELAÇÕES TRIGONOMETRICAS

Se tomarmos as equações (9, 10, 11 e 12) e as sommarmos ou diminuirmos duas a duas por modo que os senos se sommem ou diminuam com os senos, e os cosenos respectivamente tambem com os cosenos, chegaremos ás seguintes fórmulas, que nos vão dar outras mais commodas para os calculos da Trigonometria:

$$\text{sen}\ (a+b) + \text{sen}\ (a-b) = 2\ \text{sen}\ a \cos b$$

$$\text{sen}\ (a+b) - \text{sen}\ (a-b) = 2\ \text{sen}\ b \cos a$$

$$\cos (a+b) + \cos (a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos (a+b) - \cos (a-b) = -2\ \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b$$

Se ao arco $a+b$ chamarmos p; e ao arco $a-b$ chamarmos q; isto é, se fôr

$$a+b=p \qquad\qquad a-b=q$$

veremos que os valores de a e de b serão respectivamente:

$$a = \frac{1}{2}(p+q) \qquad b = \frac{1}{2}(p-q)$$

porque se sommarmos os dois valores de p e q acharemos:

$$a+b+a-b=p+q$$

ou

$$2a=p+q \qquad \therefore\ a=\frac{p+q}{2}$$

Se diminuirmos, acharemos:

$$a+b-a+b=p-q$$

ou

$$2b=p-q \qquad \therefore\ b=\frac{p-q}{2}$$

Introduzindo estes valores de a e de b, e os valores $a+b$ e $a-b$ nas equações que obtivemos pela somma e subtração, acharemos as seguintes equações:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \qquad (20)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q) \qquad (21)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \qquad (22)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \qquad (23)$$

equações estas que são proprias para tornar calculaveis por meio de logarithmos a somma ou a differença de dois senos ou de dois cosenos.

Para transformar em producto a somma ou a differença de duas tangentes, bastar-nos-ha lembrar que $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

e que $\operatorname{tg} b = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$ E portanto será:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$$

ou reduzindo ao mesmo denominador:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}$$

Mas pela fórmula (12) é o numerador egual a sen $(a + b)$, e portanto:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos a \cos b}$$

Se em logar da somma fizermos a differença, apparecer-nos-ha:

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} - \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$$

ou

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}$$

e pela fórmula (11):

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\cos a \cos b}$$

Reunindo as duas fórmulas n'uma geral, será:

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b} \qquad (24)$$

fórmula esta perfeitamente propria para ser calculada pelos logarithmos, como acharamos tambem para a somma e differença dos senos e cosenos.

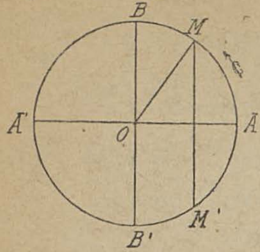

Fig 2

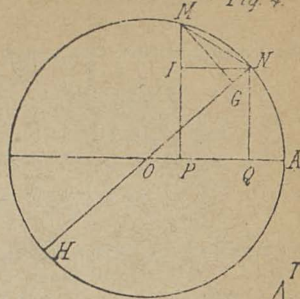

Fig. 4

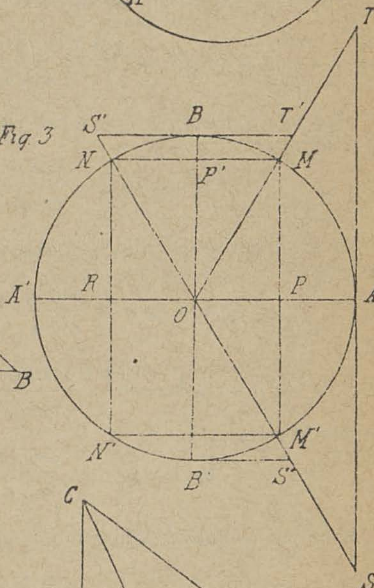

Fig. 3

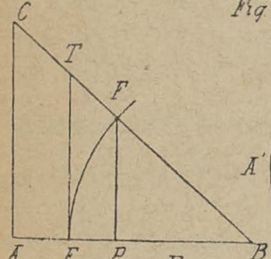

Fig. 5.

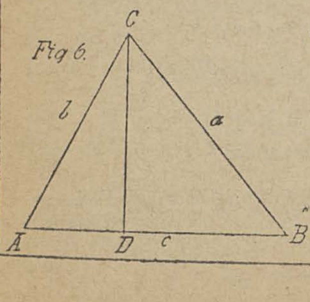

Fig 6.

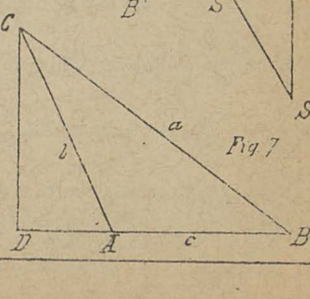

Fig. 7

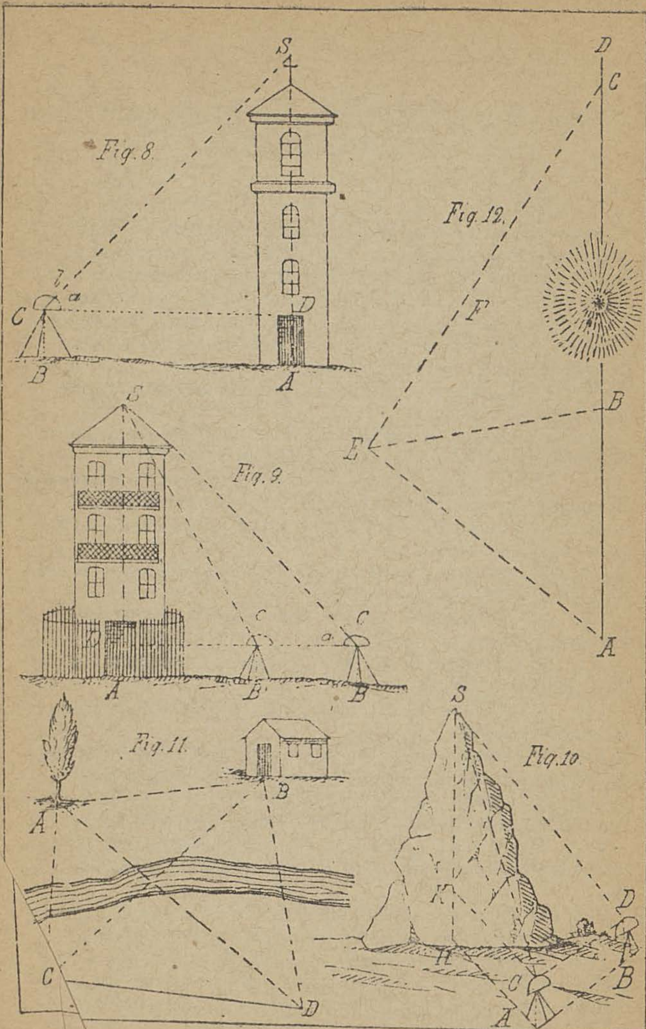

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

THEOREMAS CORRESPONDENTES ÁS FORMULAS ANTERIORES

São estas fórmulas, devidamente marcadas de (1) a (24), as principaes e mais usuaes da Trigonometria, e que correspondem aos theoremas que passamos a enunciar, theoremas que é necessario saber de cór, porque alguns são de uso constante; e para alguem poderá ser mais facil reter o theorema do que a fórmula, e por isso os enunciamos, indicando pelo numero entre parenthesis qual a fórmula a que se refere:

(1) A somma dos quadrados do seno e coseno de um arco é egual á unidade.

(2) A somma do quadrado da tangente de um arco e a unidade é egual á secante quadrada do mesmo arco.

(3) A somma do quadrado da cotangente de um arco e a unidade é egual á cosecante quadrada do mesmo arco.

(4) A tangente de um arco é egual ao quociente do seno pelo coseno do mesmo arco.

(5) A secante de um arco é egual ao quociente da unidade pelo coseno do mesmo arco.

(6) A cotangente de um arco é egual ao quociente do coseno pelo seno do mesmo arco.

(7) A cosecante de um arco é egual ao quociente da unidade pelo seno do mesmo arco.

(8) O producto da tangente pela cotangente de um arco é egual á unidade.

(9) O coseno da differença de dois arcos é egual á somma dos productos dos cosenos e senos dos mesmos arcos.

(10) O coseno da somma de dois arcos é egual á differença dos productos dos cosenos e senos dos mesmos arcos.

(11) O seno da differença de dois arcos é egual á differença dos productos do seno de um arco pelo coseno do outro.

(12) O seno da somma de dois arcos é egual á somm dos productos do seno de um arco pelo coseno do outro.

(13) A tangente da somma ou differença de dois arc é egual ao quociente da somma ou differença das tang tes d'esses arcos pela differença ou pela somma da unidad e o producto das tangentes d'es es mesmos arcos.

(14) O coseno de um arco é egual á differença dos quadrados do coseno e seno do arco sub-duplo.

(15) O seno de um arco é egual ao dobro do producto do seno pelo coseno do arco sub-duplo.

(16) A tangente de um arco é egual ao quociente do dobro da tangente do arco sub-duplo pela differença entre a unidade e o quadrado da tangente do mesmo arco sub-duplo.

(17) O coseno de um arco é egual á raiz quadrada da metade da somma da unidade e o coseno do arco duplo.

(18) O seno de um arco é egual á raiz quadrada da metade da differença da unidade e o coseno do arco duplo.

(19) A tangente de um arco é egual á raiz quadrada do quociente da differença pela somma da unidade e o coseno do arco duplo.

(20) A somma de dois senos de dois arcos é egual a duas vezes o producto do seno da semi-somma dos arcos pelo coseno da semi-differença dos mesmos arcos.

(21) A differença de dois senos de dois arcos é egual a duas vezes o producto do seno da semi-differença dos arcos pelo coseno da semi-somma dos mesmos arcos.

(22) A somma de dois cosenos de dois arcos é egual a duas vezes o producto do coseno da semi-somma pelo coseno da semi-differença dos dois arcos.

(23) A differença de dois cosenos de dois arcos é egual a duas vezes o producto do seno da semi-somma pelo seno da semi-differença d'esses mesmos arcos.

(24) A somma ou a differença de duas tangentes de dois arcos é egual ao quociente do seno da semi-somma ou da semi-differença d'esses arcos pelo producto dos cosenos dos dois arcos.

Alêm d'estes ha ainda alguns outros theoremas que não enunciámos aqui, apezar de termos dado as fórmulas; e outros aos quaes nem nos referimos na deducção das fórmulas; mas tanto aquelles como estes são de uso menos commum, e por isso os não enunciámos.

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS

Resolver os triangulos é, como já sabemos, o fim da *Trigonometria*. Isto é: pode dizer-se que a *Trigonometria* tem por fim calcular tres dos seis elementos de um qualquer triangulo, quando são dados os outros tres elementos.

Os elementos de um triangulo qualquer são—os tres lados e os tres angulos; e para que o problema seja definido é necessario sempre que entre os elementos conhecidos esteja pelo menos um lado.

Como, porêm, a resolução de um triangulo se funda em determinadas relações existentes entre os lados e os angulos de um qualquer triangulo, isto é, entre os lados e as funcções circulares dos angulos do triangulo, por isso deduziremos primeiramente essas relações, que nos serão necessarias para a resolução dos triangulos.

Segundo o uso representaremos pelas lettras A, B, C, os angulos de qualquer triangulo, servindo-nos as lettras a, b, c, para respectivamente representarem os lados oppostos aos angulos, que dissémos serem designados por A, B, C, sendo sempre A o angulo recto nos triangulos rectangulos.

RELAÇÕES ENTRE OS LADOS E OS ANGULOS DE UM TRIANGULO RECTANGULO

Supponhamos que, conforme as convenções atraz admittidas, temos (fig. 5) o triangulo $A\,B\,C$ em que A é um angulo recto.

Em relação a qualquer triangulo rectangulo podem sempre affirmar-se os seguintes theoremas:

1.º *Qualquer dos cathetos é egual á hypothenusa multiplicada pelo seno do angulo opposto ou pelo coseno do angulo comprehendido entre o catheto e a hypothenusa.*

2.º *Qualquer dos cathetos é egual ao outro multiplicado pela tangente do angulo opposto ao primeiro catheto.*

Para demonstrarmos estes dois theoremas descrevamos do ponto B, como centro, e com um raio egual á unidade, um arco de circulo EF e pelo ponto F tiremos FP perpendicular a BA.

Os dois triangulos BPF e BAC são similhantes por terem todos os tres angulos eguaes. E por isso teremos

$$\frac{BA}{BP} = \frac{BC}{BF}$$

ou pela definição de coseno

$$\frac{c}{\cos B} = \frac{a}{1}$$

e portanto

$$c = a \cos B \tag{25}$$

Como o angulo em C é complemento de B, por ser o angulo A de 90^0; e porque o seno de um angulo é o coseno do seu complemento; teremos

$$\operatorname{sen} C = \cos B$$

e portanto, substituindo na fórmula, será

$$c = a \operatorname{sen} C$$

E do mesmo modo para o outro lado será:

$$b = a \cos C \qquad \text{e} \qquad b = a \operatorname{sen} B$$

Para demonstrarmos o segundo theorema tiremos a tangente TE; e então teremos nos dois triangulos similhantes ABC e EBT

$$\frac{AC}{ET} = \frac{AB}{BE}$$

ou, pela definição de tangente,

$$\frac{b}{\operatorname{tg} B} = \frac{c}{1}$$

e portanto:

E para o outro lado

$$b = c \operatorname{tg} B \qquad (26)$$
$$c = b \operatorname{tg} C$$

Poderiamos tambem exprimir em cotangentes, mas não é tão usual.

Alêm d'estas fórmulas ha ainda as bem conhecidas fórmulas de Geometria:

$$B + C = 90^0 \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

RELAÇÕES ENTRE OS LADOS E OS ANGULOS DE UM TRIANGULO QUALQUER

Em qualquer triangulo dão-se sempre os dois seguintes theoremas:

1.º *O quadrado de um qualquer lado é egual á somma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o producto d'estes lados pelo coseno do angulo por elles comprehendido.*

2.º *Os lados de qualquer triangulo são sempre proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.*

Para demonstrar o primeiro theorema consideremos (fig. 6) o triangulo $A\,B\,C$, e do ponto C tiremos a perpendicular $C\,D$, que é a altura do triangulo.

Assim teremos formado dois triangulos rectangulos $A\,D\,C$ e $B\,D\,C$.

Ora, pela Geometria, sabe-se que no triangulo $A\,B\,C$ é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c.\,A\,D$$

quando consideramos o lado a opposto a um angulo agudo A: por que no triangulo $C\,B\,D$ é

$$a^2 = \overline{C\,D}^2 + \overline{D\,B}^2$$

Mas no triangulo $A\,D\,C$ é:

$$\overline{C\,D}^2 = b^2 - \overline{A\,D}^2$$

e portanto será:

$$a^2 = b^2 - \overline{A\,D}^2 + \overline{D\,B}^2$$

Mas $$BD = AB - AD = c - AD$$

e portanto

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + (c - AD)^2$$

Desinvolvendo, vem

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + c^2 + \overline{AD}^2 - 2\,c.\,AD$$

e afinal

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c.\,AD$$

Mas no triangulo ADC, por ser rectangulo, temos (25)

$$AD = b \cos A$$

e substituindo na fórmula anterior vem afinal o theorema primeiro que queriamos demonstrar:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A \qquad (27)$$

Ainda poderiamos suppôr (fig. 7) que o lado em questão era opposto a um angulo obtuso. E então, se n'esse caso abaixarmos de C a recta CD teremos pela Geometria:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c.\,AD$$

porque no triangulo CDB é:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$$

Mas no triangulo CAD é

$$\overline{CD}^2 = b^2 - \overline{DA}^2 \qquad \text{e portanto}$$

$$a^2 = b^2 - \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2$$

Mas $$\overline{BD}^2 = (c + AD)^2$$
e portanto

$$a^2 = b^2 - \overline{DA}^2 + c^2 + \overline{AD}^2 + 2\,c.\,AD$$

e afinal

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c.\,AD$$

Mas no triangulo $C\,A\,D$, por ser rectangulo, temos

$$A\,D = b \cos C\,A\,D = b \cos (180 - A)$$
$$A\,D = -b \cos A$$

pelo que já vimos no principio d'este livrinho.

E substituindo na fórmula dada pela Geometria virá do mesmo modo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

E portanto poderemos com esta relação fundamental formar as tres seguintes equações, que servem para resolver os triangulos obliquangulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C$$

Para demonstrar o segundo theorema consideraremos ainda os mesmos dois triangulos (fig. 6 e 7) divididos em dois triangulos rectangulos, cada um d'elles pela perpendicular $C\,D$. E teremos, pelas propriedades dos triangulos rectangulos:

$$C\,D = a \cos B\,C\,D = a \operatorname{sen} B$$
$$C\,D = b \cos A\,C\,D = b \operatorname{sen} A$$

e portanto

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$$

d'onde

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad (28)$$

porque para esta terceira egualdade bastaria baixar a perpendicular do ponto A sobre $C\,B$ e fazer identicas considerações.

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS RECTANGULOS

Varios são os problemas que se podem dar na resolução d'estes triangulos, mas todos elles se resolvem pelas fórmulas que atraz concluimos quando tratámos das relações (25 e 26) dos triangulos rectangulos.

Supponhamos as hypotheses dos quatro seguintes casos.

1.º CASO

São dados só os dois cathetos b *e* c.

O angulo B é dado pela fórmula

$$b = c \operatorname{tg} B \qquad \therefore \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

O angulo C é dado por

$$B + C = 90 \qquad \therefore C = 90 - B$$

A hypothenusa é dada por

$$b = a \operatorname{sen} B \qquad \therefore a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

E, empregando os logarithmos, temos

$$\log \operatorname{tg} B = \log b - \log c$$

$$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B$$

2.º CASO

E' dada a hypothenusa a *e um catheto* b.

Pela fórmula $b = a \operatorname{sen} B$ temos $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$

$$\log \operatorname{sen} B = \log b - \log a$$

$$C = 90 - B$$

E a fórmula

$$c = a \cos B$$

dá-nos

$$\log c = \log a + \log \cos B$$

E portanto o valor de c, que poderia ser dado pela equação

$$c^2 = a^2 - b^2$$

expressa em quantidades conhecidas nos dados da questão, podendo transformar-se em

$$c^2 = (a + b)\,(a - b)$$

$$\log c = \frac{1}{2}\,[\log\,(a + b) + \log\,(a - b)]$$

3.º CASO

E' dada a hypothenusa a *e um angulo* B. Teremos

$$C = 90^0 - B$$

$$b = a \text{ sen } B$$

$$\log b = \log a + \log \text{ sen } B$$

$$c = a \cos B$$

$$\log c = \log a + \log \cos B$$

4.º CASO

E' dado um catheto b *e o angulo opposto* B. Teremos

$$C = 90^0 - B$$

$$b = a \text{ sen } B \qquad \therefore\ a = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$\log a = \log b - \log \text{ sen } B$$

$$b = c \text{ tg } B \qquad \therefore\ c = \frac{b}{\text{tg } B}$$

$$\log c = \log b - \log \text{ tg } B$$

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS OBLIQUANGULOS

Varios são os casos que se podem dar na resolução dos triangulos obliquangulos. E, do mesmo modo que fizemos para os triangulos rectangulos, tambem aqui consideraremos os varios casos especificadamente.

1.º CASO

São dados um lado a *e dois angulos* B *e* C.

Como a somma dos tres angulos do triangulo é egual a *180* graus, facilmente se reconhecerá o terceiro angulo, porque será:

$$A = 180^0 - (B + C)$$

Os dois lados b e c ser-nos-hão dados pelas fórmulas

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A} \qquad \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

porque tiramos d'aqui

$$b = a\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} \qquad c = a\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

e portanto respectivamente

$$\log b = \log a + \log \text{sen } B + \text{clg sen } A$$

$$\log c = \log a + \log \text{sen } C + \text{clg sen } A$$

Em vez de empregarmos os complementarios dos logarithmos poderiamos das sommas dos logarithmos subtrahir depois os logarithmos de seno A.

Convem aqui lembrar que, quando se usar das tábuas de Callet, é necessario não esquecer subtrahir as 10 unidades que veem à mais na caracteristica dos logarithmos dos senos.

2.º CASO

Dão-se dois lados a, b, *e o angulo* A *opposto a um d'elles.*

Já dissémos que da proporção

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

se tira uma determinada relação. Mas agora tiraremos outra, porque nos convem achar o valor de sen B; e assim acharemos

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \qquad (29)$$

e portanto

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A + \operatorname{clg} a$$

O valor de C é calculado pela fórmula

$$C = 180 - (A + B)$$

e o valor de c pela fórmula já empregada no 1.º caso

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

ou

$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{clg} \operatorname{sen} A$$

A fórmula (29) empregada aqui dá logar a uma discussão muito grande. E, para bem podermos apreciál-a, consideraremos tres casos que se podem dar em refencia ao dividendo (b sen A) e ao divisor a.

1.º b sen $A > a$. N'este caso achar-se-hia para sen B um valor maior do que 1, o que é impossivel, porque o seno só varia entre $+1$ e -1. Portanto quer isto dizer que o angulo B não existe, e que n'este caso o problema é impossivel.

2.º b sen $A = a$. Pela fórmula (29) achar-se-ha sen $B = 1$, isto é, $B = 90^0$.

Portanto, para que este valor seja admissivel, é necessario que o angulo A seja agudo, porque $A + C$ deve ser egual a 90^0 tambem; e por isso $A = 90^0$ não daria solução, porque não existiria o angulo C; bem omo, se o angulo A fôsse maior do que 90 graus, tambem não haveria solução alguma.

3.º b sen $A < a$. Portanto sen B menor do que 1.

O valor de sen B corresponde a dois angulos supplementares; e por isso é necessario ver, qual dos angulos satisfaz ao problema e qual d'elles não satisfaz, se assim pode succeder.

Os dois angulos são certamente um angulo agudo e outro obtuso, porque um é o supplemento do outro.

Designando pois por β o angulo agudo, que as tábuas nos dão, teremos

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

E, para discutirmos este caso, supponhamos ainda

$$a > b \qquad a = b \qquad a < b$$

Pela primeira hypothese e pela fórmula (29) logo poderemos concluir que $A > B$; pode portanto tomar-se $B = \beta$, o que dá logar a uma unica solução.

Pela segunda hypothese apparece-nos logo $B = A$, hypothese esta que só é admissivel quando o angulo A é agudo; e então ha tambem só uma unica solução.

E finalmente pela terceira hypothese vem $A < B$ e do mesmo modo $\operatorname{sen} \beta > \operatorname{sen} A$: pode-se, se o angulo A fôr agudo, tomar ou $B = \beta$ ou então $B = 180 - \beta$, admittindo o problema duas soluções.

Se n'esta terceira hypothese fôr pelo contrario obtuso o angulo A, o problema será impossivel, porque, sendo $B > A$ e sendo A obtuso, só a somma d'estes dois angulos passará de 180 graus, e portanto não se poderá formar o triangulo, porque a somma de todos os tres angulos deve ser egual a 180^0.

Para mais rapidamente se poder apreciar o valor d'esta discussão, resumiremos tudo do seguinte modo:

$b \operatorname{sen} A > a$

$$b \operatorname{sen} A = a \begin{cases} A > 90^0 \\ A = 90^0 \end{cases} \text{Não tem solução} \\ \qquad\qquad A < 90^0\text{-Uma solução}$$

$$b \operatorname{sen} A < a \begin{cases} a > b\text{-Uma solução: } B = \beta \\ a = b \begin{cases} \left.\begin{array}{l} A = 90^0 \\ A > 90^0 \end{array}\right\} \text{Não tem solução} \\ A < 90^0\text{-Uma solução: } B = \beta = A \end{cases} \\ a < b \begin{cases} A > 90^0\text{-Não tem solução} \\ A < 90^0\text{-Duas soluções} \begin{cases} B = \beta \\ B = 180 - \beta \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

3.º CASO

Dão-se dois lados b *e* c *e o angulo comprehendido* A.

A somma $B+C$ dos dois angulos desconhecidos é egual a $180-A$ por ser $A+B+C=180^0$

Para calcularmos a differença recorremos á conhecida proporção da relação entre os lados e os angulos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

d'onde tiramos

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B-\operatorname{sen} C}$$

Substituindo a somma e differença dos senos pelos productos (fórmulas 20 e 21), teremos:

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)}$$

O que se enuncia dizendo que:

Em qualquer triangulo, a somma de dois lados está para a sua differença, assim como a tangente da semi-somma dos angulos oppostos está para a tangente da sua semi-differença.

D'aquella fórmula ainda se tira:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)$$

ou, ainda, por ser

$$B+C=180-A$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A \qquad (30)$$

pois que será

$$\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}$$

e portanto

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)=\cot\frac{A}{2}$$

Recorrendo ás tábuas dos logarithmos, acharemos a semi-differença dos angulos B, C, pela fórmula

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\lg(b-c)+\lg\cot\frac{1}{2}A-\lg(b-c)$$

Assim obteremos $\frac{B-C}{2}$; e como $B+C=180-A$

será

$$\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}$$

Para obtermos B, bastará sommar os dois valores achados para a semi-differença e para a semi-somma; se quizessemos antes C, bastaria então acharmos a differença entre aquelles mesmos valores.

Isto é:

$$B=\frac{1}{2}(B+C)+\frac{1}{2}(B-C)$$

$$C=\frac{1}{2}(B+C)-\frac{1}{2}(B-C)$$

Para depois calcularmos o lado a, basta recorrer á fórmula

$$a=b\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}$$

$$\log a = \log b + \log \text{sen } A - \log \text{sen } B$$

4.º CASO

São dados os tres lados a, b, c.

Recorrendo á fórmula (27) podemos tirar o valor:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} + 1$$

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

e, visto que

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$$

como demonstrámos quando calculámos a fórmula (17), teremos

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,b\,c}$$

Ou, representando o perimetro do triangulo, isto é $(a + b + c)$, por $2\,p$, virá a seguinte equação:

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{2\,p \times (b + c - a)}{2\,b\,c}$$

e juntando e subtrahindo a ao factor entre parenthesis

$$2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{2p(b+c+a-a-a)}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{2p \times 2(p-a)}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-a)p}{bc}} \qquad (31)$$

Assim como juntámos a unidade para chegar a esta fórmula, poderiamos ter subtrahido da unidade o valor de cos A, e teriamos assim achado a seguinte fórmula (que apresentamos sem estar a desinvolver o calculo, porque nos levaria muito espaço, e necessitamol-o ainda para outros pontos a tratar):

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad (32)$$

E dividindo a equação (32) pela equação (31) teremos:

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (33)$$

De todas estas tres ultimas fórmulas a (33) é a mais commoda para empregar, quando se quer resolver o triangulo, porque, com os mesmos quatro logarithmos de p, $(p-a)$, $(p-b)$ e $(p-c)$, se podem calcular todos os tres angulos, porquanto

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Empregando os logarithmos, acharemos para A, por ex.

$$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{\lg (p-b) + \lg (p-c) + \operatorname{clg} p + \operatorname{clg} (p-a)}{2}$$

E do mesmo modo se procederia para os outros angulos, devendo não esquecer que é necessario attender aos complementarios dos logarithmos para os fazer desapparecer na somma final.

ÁREA DE UM TRIANGULO

A área de um triangulo é egual a metade do producto de dois dos seus lados multiplicado pelo seno do angulo por elles comprehendido.

Supponhamos (fig 6) que temos o triangulo $A\,B\,C$, cujos lados são devidamente representados por a, b, c, lados respectivamente oppostos aos angulos A, B, C.

Já atraz vimos que a altura CD do triangulo é egual a b sen A.

E sabemos pela Geometria que a área de qualquer triangulo é egual a metade da base multiplicada pela altura.

No triangulo a que nos estamos referindo será pois a área, se a representarmos por T (inicial do triangulo),

$$T = \frac{1}{2} c \times CD$$

mas como $$CD = b \operatorname{sen} A$$

será $$T = \frac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen} A \qquad (34)$$

como haviamos enunciado logo no principio.

Ha ainda outras expressões da área de qualquer triangulo, que passamos a enunciar e demonstrar tambem.

A área de qualquer triangulo é egual a metade do quadrado de um d s seus lados, multiplicado pelo producto dos senos dos angulos adjacentes, e dividido pelo seno da somma d'esses mesmos angulos.

Para demonstrar tal verdade, tomemos a fórmula (34), que acabámos de deduzir relativamente á area de um triangulo, e substituamos b e c pelos seus respectivos valores tirados das fórmulas (28), que são:

$$b = a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \qquad c = a \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

apparecer-nos-ha:

$$T = \frac{1}{2} a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \times a \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \times \operatorname{sen} A$$

ou fazendo as reducções:

$$T = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Mas como

$$A = 180 - (B + C)$$

e porque os senos dos arcos supplementares são eguaes e do mesmo signal, será

$$T = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} (B + C)} \tag{35}$$

Pode ainda dizer-se tambem:

A area de um qualquer triangulo é egual á raiz quadrada do producto do meio-perimetro do triangulo pelas differenças entre o meio-perimetro e cada um dos lados do triangulo.

Para vermos isto, bastará lembrar que pela fórmula (15) temos

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$$

mas pela fórmula (31) é

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b\,c}}$$

e pela fórmula (32) é

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}$$

e portanto, substituindo estes dois valores, virá:

$$\text{sen}\, A = 2\sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{b^2\,c^2}}$$

ou ainda

$$\text{sen}\, A = \frac{2}{b\,c}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

e, substituindo na fórmula (34), apparecer-nos-ha para o valor da area do triangulo:

$$T = \frac{1}{2}\,b\,c \times \frac{2}{b\,c}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

ou simplificando:

$$T = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad (36)$$

Podemos ainda dar mais uma outra expressão da área do triangulo, alêm das que já deixámos mencionadas. E' a seguinte:

A área de um qualquer triangulo é egual ao quadrado do meio-perimetro multiplicado pelo producto das tangentes das metades de todos os tres angulos.

Pela fórmula (33) sabemos que:

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

E, multiplicando todas estas tres egualdades membro a membro, virá para $(\text{tg}\,\frac{1}{2}\,A.\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,B.\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C)$ o valor:

$$\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)\,(p-a)\,(p-c)\,(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-a)\,p\,(p-b)\,p\,(p-c)}}$$

Simplificando, vem:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^3}}$$

ou multiplicando ambos os termos da fracção por p:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}}$$

e extrahindo a raiz ao denominador

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{1}{p^2}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Mas pela fórmula (36) é:

$$T=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

e na fórmula anterior podemos ainda multiplicar ambos os membros por p^2, o que dará:

$$p^2.\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Mas aqui o segundo membro é exactamente a expressão da área do triangulo dado pela fórmula (36). Por isso será:

$$T=p^2.\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C \qquad (37)$$

Todas estas fórmulas são calculaveis por logarithmos.

PRINCIPAES APPLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Já no principio dissémos que a *Trigonometria* era a parte indispensavel da *Topographia;* e já indicámos ao leitor a leitura do opusculo que trata d'esta sciencia, que tem por fim descrever qualquer porção da superficie da Terra.

Não descreveremos agora aqui os instrumentos com que se medem os angulos: —*graphometros, goniometros, bussolas, theodolitos,* etc.,—que ficaram descriptos no livrinho da *Topographia* (*); nem diremos o modo de se usar d'elles, nem ainda tambem quaes os meios empregados para medir distancias, lembrando que a *cadeia metrica* satisfaz em geral n'estas medições a que nos vamos referir.

Diremos, porêm, que o terreno, que se quer medir ou descrever, se divide em triangulos, e que estes triangulos teem uma base que se mede (é um dos seus lados), e que os angulos são dados pelos instrumentos, servindo então as formulas trigonometricas para calcular o valor dos outros dois lados.

E diremos ainda mais como se podem resolver alguns problemas muito usuaes que se incontram no estudo da Topographia, e que são verdadeiras applicações da Trigonometria.

Problema I.—*Achar a altura de uma torre cujo pé é accessivel, estando a base collocada sobre um terreno sensivelmente horizontal.*

Supponhamos que a torre (fig. 8) tem a altura SA e que o seu vertice é a cruz S; para medir esta altura collocaremos o instrumento de medir os angulos a uma distancia da torre que seja quasi egual á sua altura (pouco mais ou menos); com o instrumento lê-se o arco graduado ab, que mede o angulo formado pela horizontal que passa no instrumento e pela linha que se suppõe ir do instrumento ao vertice da torre (isto é, mede-se o angulo C do triangulo rectangulo SCD); e com a cadeia mede-se a distancia $BA = CD$ que vai desde o ponto B até á torre; e assim teremos no triangulo rectangulo SCD devidamente conhecidos o lado CD e o angulo SCD, e portanto poderemos calcular SD; bastará accrescentar-lhe apenas a altura DA egual a CB, que é a altura do instrumento, para ter a altura procurada da torre.

Se o angulo dado pelo instrumento fôsse de 45°, teriamos

(*) Vid. vol. XCI da *Bibliotheca do Povo e das Escolas.*

logo a altura da torre com a medição da base, porque esta sería egual á altura, por ser isosceles o triangulo n'este caso.

Problema II.—*Achar a altura de um edificio, de cuja base não é possivel approximar-se.*

Quer isto dizer, suppondo agora a fig. 9, que se não pode medir a distancia $B\ A$.

Proceder-se-ha pois do seguinte modo:

Colloca-se o instrumento em B e mede-se o angulo $S\ C\ D$; transporta-se depois o instrumento para B' e mede-se o angulo $S\ C'\ C$; mede-se com a cadeia a distancia $B\ B' = C\ C'$.

Ficaremos assim tendo no triangulo $S\ C'\ C$ devidamente conhecidos os angulos em C e em C' e o lado comprehendido $C\ C'$, e portanto poderemos medir o lado $S\ C'$.

Com o valor d'este lado e com o valor do angulo $S\ C'\ D$, que é o supplemento do angulo $S\ C'\ C$, resolveremos então o triangulo rectangulo $S\ C'\ D$, e assim teremos o valor de $S\ D$; bastará depois juntar a altura do instrumento $C\ B = D\ A$ para termos o valor de $S\ A$, que é o valor procurado.

Problema III.—*Achar a altura de uma qualquer montanha.*

Supponhamos que a altura da montanha que se pretende medir é a recta $S\ H$ da fig. 10; para tal conseguir, escolheremos duas posições ou estações para o instrumento de medir os angulos, sendo uma, por exemplo, A, que esteja proximamente no mesmo plano horizontal que passa pelo pé da linha $S\ H$, representativa da altura da montanha, e sendo a outra B a tal distancia que seja facil medil-a com a cadeia apropriada.

Colloca-se o instrumento na estação A, collocando em B uma mira qualquer com a mesma altura do instrumento, e n'esta estação medem-se successivamente os dois angulos $S\ C\ K$ e $S\ C\ D$; muda-se depois o instrumento para B e a mira para A, e mede-se então o angulo $S\ D\ C$; e por meio dos calculos trigonometricos resolve-se o triangulo $S\ C\ D$ por se conhecerem o lado $C\ D = A\ B$ e os dois angulos adjacentes, vindo portanto a saber-se o valor do lado $S\ C$.

Resolve-se depois o triangulo rectangulo $S\ C\ K$ por serem conhecidos o lado $S\ C$ e o angulo $S\ C\ K$, e obteremos assim o valor de $S\ K$; bastará depois juntar-lhe mais a altura do instrumento, que é $K\ H$, para ter a altura procurada $S\ H$, como desejavamos.

Problema IV.—*Achar a distancia entre dois pontos, um dos quaes é inaccessivel.*

Supponhamos que se quer saber a distancia $C\ A$ (fig. 11) entre o ponto A, ao qual se não pode chegar, e o ponto C que é perfeitamente accessivel, porque suppomos estar na margem do rio, representado na figura, onde estão marcados o ponto *C* e o ponto *D* que escolhemos depois para medir perfeitamente bem a base *C D;* colloca-se o instrumento de medir os angulos em *C* e em *D*, e medem-se os angulos *A C D* e *A D C*, para podermos assim achar o angulo *C A D*, que é a differença entre 180 graus e a somma d'aquelles dois achados pelo instrumento; bastará depois empregar as fórmulas trigonometricas apropriadas para achar a distancia *A C* no triangulo *A C D*, quando são conhecidos os angulos em *A* e em *D* e a distancia *C D*, isto é, para achar a distancia entre o ponto accessivel *C* e o ponto inaccessivel *A* que está para além do rio.

Problema V.—*Achar a distancia entre dois pontos quaesquer, sendo ambos completamente inaccessiveis.*

Supponhamos ainda na mesma fig. 12 que os dois pontos, entre os quaes se deseja achar a distancia, sejam os dois pontos *A* e *B*, ambos elles do lado opposto áquelle onde nos achamos, considerando ainda que estamos na margem de um rio.

Escolhemos do lado onde estamos uma base *C D* que mediremos com todo o cuidado; e, estacionando em dois pontos *C* e *D*, medimos, com o instrumento de que dispuzermos, os angulos *A C D*, *B C D* e *A C B* no ponto *C*, e os angulos *B D C* e *A D C* no ponto *D*.

Temos assim os necessarios elementos para podermos, por meio das fórmulas trigonometricas, calcular os lados *A C* e *B C* dos triangulos *A C D* e *B C D*, uma vez que em ambos se conhece o lado *CD* e os angulos que formam os triangulos.

Conhecidos estes dois valores de *A C* e *B C*, poderemos resolver o triangulo *B A C*, porque tambem conhecemos o angulo em *C;* e assim teremos o meio de achar o valor de *A B*, que é a distancia procurada, como dissémos logo no começo do problema.

Problema VI.—*Dado um determinado alinhamento, pretende-se prolongál-o para alêm de um obstaculo que não permitte vêr a direcção do alinhamento.*

Supponhamos na fig. 12 que uma montanha *O* não deixa vêr o alinhamento *A B* que se necessita prolongar para alêm da montanha.

Para isto, mede-se com a cadeia a distancia entre os pontos *A* e *B*, e escolhe-se uma estação *E* d'onde se possam vêr não só os pontos *A* e *B* como ainda o terreno onde se deverá fazer o prolongamento do alinhamento *A B*.

Com o instrumento de medir os angulos medem-se os angulos *A* e *B* do triangulo *A B E* estacionando respectivamente em A e B, e calcula-se pelas fórmulas da Trigonometria o lado $A E$.

Do ponto E dirige-se um alinhamento $E F$ para o terreno onde se deve fazer o prolongamento desejado, e mede-se o angulo $A E F$ estacionando com o instrumento em E.

Este alinhamento prolongado ha-de ir incontrar o alinhamento $A B$ depois de prolongado, como se quer fazer, e supponhamos que seja C o ponto do incontro dos dois alinhamentos: teremos assim formado o triangulo $A C E$, onde se conhece o lado $A E$ e todos os angulos do triangulo; e portanto poderemos calcular o valor de $E C$.

Bastará pois no alinhamento $E F$ marcar uma distancia egual a $E C$ incontrada pelo calculo, para ter o ponto C; e depois estacionar em C e traçar ahi um alinhamento $C D$ que faça com o outro alinhamento $E C$ um angulo egual ao supplemento do angulo $A C E$, para ter resolvido o problema determinando a linha $D C O$ que é o prolongamento da linha $A B$ para alêm da montanha O, como desejavamos, e que nos servia de obstaculo para o poder fazer ao modo usual.

TÁBUAS TRIGONOMETRICAS

Estas tábuas apresentam-se de duas differentes especies: podem ter inscriptos os valores das relações trigonometricas correspondentes aos differentes angulos expressos em graus, ou podem ter inscriptos os logarithmos de taes relações.

São estas ultimas as que mais acceitação teem na práctica; e apezar de haver differenças entre as tábuas, conforme os auctores, só nos referiremos ás tábuas de Callet por serem as mais usadas geralmente.

Não comporta este livrinho o intrar em considerações relativas aos processos empregados para a construcção das tábuas dos logarithmos de taes relações; e nem mesmo aqui daremos alguns principios relativamente á construcção das tábuas, porque o que mais nos convem é saber como ellas estão dispostas, e como nos deveremos servir do seu auxilio.

DISPOSIÇÃO DAS TÁBUAS DE CALLET

Nas tábuas de Callet ha sempre em primeiro logar as tábuas dos logarithmos dos numeros, tábuas cujo uso já ficou explicado no livrinho de *Algebra* (*) e de que necessitamos tambem nos calculos trigonometricos.

Nas tábuas trigonometricas, que se seguem áquellas, ha dois grupos distinctos.

O primeiro grupo contêm os logarithmos dos senos e das tangentes de segundo em segundo para os cinco primeiros graus, os quaes logarithmos são tambem os dos cosenos e cotangentes dos angulos de 90° a 85°. Os graus estão marcados na parte superior e na parte inferior da pagina: os senos e os cosenos estão na pagina da esquerda, as tangentes e as cotangentes na pagina da direita. Aos graus marcados no alto das paginas são referidos os minutos, marcados no alto das columnas, e os segundos, marcados na primeira columna á esquerda. Os minutos marcados na parte inferior das columnas e os segundos collocados na ultima columna da direita referem-se aos graus que estão marcados na parte inferior das mesmas paginas.

A este grupo de tábuas segue-se o d'aquellas que dão os logarithmos dos senos, cosenos, tangentes e cotangentes desde 0° até 90° calculados de 10″ em 10″. Os graus desde 0° até 45° são os que apparecem marcados no alto das paginas, tendo os minutos e os segundos que lhes correspondem marcados nas duas primeiras columnas da esquerda. Os graus desde 45° até 90° estão marcados na parte inferior das mesmas paginas, e os minutos e os segundos que lhes dizem respeito nas duas ultimas columnas da direita.

Na parte superior das paginas teem as columnas os seguintes titulos:

Senos *Cosenos* *Tangentes* *Cotangentes*

e na parte inferior e em correspondencia com estes mesmos titulos ha estes outros:

Cosenos *Senos* *Cotangentes* *Tangentes*

(*) Vol. XIV da *Bibliotheca do Povo e das Escolas.*

Os numeros comprehendidos em cada uma das columnas incimadas por aquelles titulos são os logarithmos das linhas respectivas ao numero de graus, minutos e segundos, indicados respectivamente na pagina e columnas lateraes.

Cada columna de logarithmos é seguida de outra que contêm as differenças entre dois logarithmos consecutivos das tábuas.

Para as tangentes e cotangentes ha só uma columna de differenças communs, visto que a differença entre os logarithmos das tangentes de dois arcos é egual á differença entre os logarithmos das cotangentes d'esses mesmos arcos, porque, para vermos isso, basta lembrar que:

$$\operatorname{tg} a \times \cot a = 1$$
$$\operatorname{tg} b \times \cot b = 1$$

e portanto $\quad \operatorname{tg} a = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} a}, \quad \operatorname{tg} b = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} b}$

e, achando a relação entre estas duas egualdades, será:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{cotg} a}}{\dfrac{1}{\operatorname{cotg} b}} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a}$$

e tomando os logarithmos:

$$\lg \operatorname{tg} a - \lg \operatorname{tg} b = \lg \operatorname{cotg} b - \lg \operatorname{cotg} a$$

como haviamos asseverado.

Os arcos superiores da pagina são complementos dos arcos inferiores; e por isso, quando n'umas columnas está *seno* na parte superior, deve estar *coseno* na parte inferior.

Assim se procurarmos nas tábuas o logarithmo do sen $30^{0}, 25', 40''$, acharemos o seguinte valor 9.7045382, tendo sido os graus procurados no alto da pagina e os minutos e os segundos nas duas primeiras columnas da esquerda da mesma pagina.

Mas, como o seno de um arco é o coseno do seu complemento, poderiamos procurar o log. do cos $59^{0}, 34', 20''$, procurando em baixo os graus e nas ultimas columnas da direita os minutos e os segundos e incontrariamos exactamente o mesmo valor.

Serve isto ainda para demonstrar que bastaria ter os arcos até 45⁰, porque de 45⁰ a 90⁰, os logarithmos dos senos, cosenos, etc. e estas mesmas relações teem valores eguaes aos logarithmos dos senos, cosenos, etc., dos arcos complementares.

N'estas tábuas de Callet para evitar o emprego das caracteristicas negativas juntou-se 10 a todos os logarithmos negativos; isto é, os logarithmos das linhas trigonometricas teem a mais um complemento nas tábuas a que nos estamos referindo; e cumpre não esquecer no final do calculo supprimir esse tal complemento que apparece a mais.

Quando se empregam as caracteristicas negativas, não é pois necessario ter tal cuidado; mas cumpre então ter muita cautela com os signaes das caracteristicas dos logarithmos para não esquecer alguma caracteristica negativa, e que tomada como positiva iria transtornar tudo.

Ha porêm ainda uma excepção no augmento dos complementos que dissémos terem sido augmentados aos logarithmos das tábuas de Callet; essa excepção dá-se quando as caracteristicas depois de augmentadas apparecem eguaes a 10 ou superiores, porque então não se lhe augmenta o complemento.

Os senos e os cosenos de 0⁰ a 90⁰, as tangentes de 0⁰ a 45⁰ e as cotangentes de 45⁰ a 90⁰ teem o augmento do complemento: as outras linhas trigonometricas não o teem, e são ellas as tangentes de 45⁰ a 90⁰ e as cotangentes de 0⁰ a 45⁰.

USO DAS TÁBUAS

Dois diversos problemas se podem apresentar para serem resolvidos pelas tábuas.

Problema I.—Sendo dado o numero de graus, minutos e segundos de um arco menor do que 90⁰, achar o logarithmo do seno, coseno, tangente ou cotangente d'esse arco.

1.º caso.—O arco dado contêm graus, minutos e dezenas de segundos exactas.

Ex.: Procura-se o logarithmo de seno de 30⁰, 25′, 40″.

Como o numero de graus é menor do que 45⁰ procura-se na parte superior da pagina 30⁰, e depois os 25′ na primeira columna da esquerda, e os 40″ na columna immediata á esquerda d'esta, e seguindo em frente d'este ultimo numero e na columna dos senos achar-se-ha:

$$\log \text{sen } 30^0, 25', 40'' = 9{,}7045382$$

Se o numero de graus fôsse superior a 45, então procurar-se-hia o numero de graus na parte inferior, o numero de minutos na ultima columna da direita, e subindo na columna á esquerda d'esta o numero de segundos; procurando depois n'esta direcção e na columna de senos, se fôr o logarithmo do seno que se deseja, achar-se-ha o logarithmo procurado.

Se se pedir, por exemplo, o seno de $63^0, 18', 20''$, e se procurar como dissémos, achar-se-ha:

$$\log \text{sen } 63^0, 18', 20'' = 9{,}9510532$$

Para as demais linhas trigonometricas que são dadas pelas tábuas, proceder-se-hia exactamente do mesmo modo, sendo então os logarithmos procurados nas columnas marcadas com o nome da linha trigonometrica em questão.

2.º caso.—O arco dado não só contêm graus, minutos e dezenas de segundos, mas ainda mesmo unidades e fracções da unidade.

N'este caso o arco está comprehendido entre dois que differem entre si 10'' porque os logarithmos estão calculados de 10 em 10 segundos.

E' por isso necessario calcular quanto se deverá juntar ao logarithmo da relação trigonometrica correspondente ao arco menor ou maior, conforme se tratar dos senos e tangentes ou dos cosenos e cotangentes.

Para fazer tal calculo, recorre-se ao principio seguinte:

As differenças entre os logarithmos de uma mesma linha trigonometrica são proporcionaes á differença dos arcos, quando estas differenças são muito pequenas.

Não é verdadeiramente rigoroso tal principio, mas na práctica é sufficiente.

Chamemos Δ a differença entre dois logarithmos consecutivos das tábuas, δ a differença entre o arco dado e o immediatamente menor das tábuas, quando se tratar de um seno ou de uma tangente, e o immediatamente maior quando se tratar de um coseno ou de uma cotangente; e chamemos Δ' a differença entre os logarithmos d'estes dois angulos, o dado e o das tábuas, maior ou menor, conforme o caso.

Pelo principio antecedente, será:

$$\frac{10''}{\delta} = \frac{\Delta}{\Delta'}$$

d'onde se tira

$$\Delta' = \frac{\delta \times \Delta}{10} = \frac{\Delta}{10} \times \delta$$

O que se pode traduzir na seguinte regra práctica:

Procura-se a differença entre os dois logarithmos consecutivos, entre os quaes está comprehendido o logarithmo do arco dado, divide-se essa differença por 10, e o quociente multiplica-se pela differença entre o arco dado e o proximamente menor das tábuas, se se trata de senos ou tangentes, ou o proximamente maior, se se trata de cosenos e cotangentes; e a parte inteira do producto junta-se ao logarithmo dado pelas tábuas para o arco menor ou maior, conforme a linha trigonometrica procurada fôr seno e tangente ou coseno e cotangente.

Estas differenças do arco menor ou maior são provenientes de que os senos e as tangentes augmentam com os arcos, emtanto que os cosenos e as cotangentes diminuem quando o arco augmenta.

Problema II.—Achar o numero de graus, minutos e segundos do arco que corresponda ao logarithmo de um seno, coseno, tangente ou cotangente, que fôr dado.

Podem n'este segundo problema darem-se ainda tambem dois casos.

1.ª caso.—Se o logarithmo dado existe nas tábuas, nada mais temos do que procurar na columna da linha trigonometrica, cujo logarithmo é dado, o numero exactamente egual ao que temos no problema, e vêr depois a quantos graus, minutos e segundos corresponde, lembrando-nos sempre que aos graus da parte superior correspondem os minutos e segundos das columnas da esquerda, e aos da parte inferior os dos minutos e segundos da direita, estando sempre os segundos na mesma linha horizontal que o logarithmo dado.

Tomar-se-hão os graus da parte superior ou inferior das tábuas, conforme o titulo da linha trigonometrica estiver na parte superior ou inferior das mesmas tábuas.

Se se pedir, por ex., o arco x do

$$\log \text{sen}\, x = 9{,}9510532$$

procura-se este logarithmo nas tábuas e nas columnas que teem por titulo *seno* na parte superior ou inferior; e, incontrando-o, nota-se que o titulo está na parte inferior e que portanto se deverão lêr os graus inferiormente, e os minutos e segundos na direita da pagina.

E procedendo d'este modo incontra-se na mesma linha horizontal 20'', na outra columna 18', e na parte inferior 63°.

Portanto o arco será:

$$x = 63^{\circ}, 18', 20''$$

2.° caso. — Quando o logarithmo dado se não incontra nas tábuas (caso este que é muito frequente), é necessario recorrer novamente ao principio das differenças que atraz vimos já, e conservando ainda exactamente as mesmas notações, Δ, Δ', e δ teremos que da proporção

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\delta}{10''}$$

se tira

$$\delta = \frac{10 \times \Delta'}{\Delta}$$

E portanto deveremos: procurar nas tábuas os logarithmos entre os quaes está comprehendido o logarithmo dado, e tomar sempre aquelle que está do lado do titulo da linha trigonometrica em questão; achar a differença entre este logarithmo e o logarithmo dado (differença que é o Δ'); e pôr por ultimo em execução a seguinte regra práctica:

A differença entre o logarithmo dado e o proximamente menor, quando se trata de senos e tangentes, ou o proximamente maior, quando nos referimos a cosenos e cotangentes, multiplica-se por 10; e divide-se este producto pela differença dos dois logarithmos, entre os quaes está comprehendido o logarithmo dado, isto é, pela differença das tábuas; e o quociente obtido, que exprime segundos, junta-se ao valor do arco que tomámos nas tábuas.

FIM

BIBLIOTHECA DO POVO E DAS ESCOLAS

COLLABORADA POR ESCRIPTORES PORTUGUEZES E BRAZILEIROS

Sob a direcção litteraria de Xavier da Cunha

Premiada com a medalha de oiro da Sociedade Giambattista Vico, de Napoles

50 RÉIS CADA VOLUME

Alguns dos seguintes livros já foram approvados pelo Governo para uso das aulas primarias, e muitos outros teem sido adoptados nos Lyceus e principaes escolas do nosso paiz.

50 RÉIS CADA VOLUME

VOLUMES PUBLICADOS:

1.ª **Serie**: N.º 1. Historia de Portugal. 2. Geographia geral. 3. Mythologia. 4. Introducção ás sciencias physico-naturaes. 5. Arithmetica práctica. 6. Zoologia. 7. Chorographia de Portugal. 8. Physica elementar. 2.ª **Serie**: N.º 9. Botanica. 10. Astronomia popular. 11. Desenho linear. 12. Economia politica. 13. Agricultura. 14. Algebra. 15. Mammiferos. 16. Hygiene. 3.ª **Serie**: N.º 17. Principios geraes de Chimica. 18. Noções geraes de Jurisprudencia. 19 Manual do fabricante de vernizes. 20. Telegraphia electrica. 21. Geometria plana. 22. A terra e os mares. 23. Acustica. 24. Gymnastica. 4.ª **Serie**: N.º 25. As colonias portuguezas. 26. Noções de Musica. 27. Chimica inorganica. 28. Centuria de celebridades femininas. 29. Mineralogia. 30. O Marquez de Pombal. 31. Geologia. 32. Codigo civil portuguez. 5.ª **Serie**: N.º 33. Historia natural das aves. 34. Meteorologia. 35. Chorographia do Brazil. 36. O homem na serie animal. 37. Tactica e armas de guerra. 38. Direito romano. 39. Chimica organica. 40. Grammatica portugueza. 6.ª **Serie**: N.º 41. Escripturação commercial. 42. Anatomia humana. 43. Geometria no espaço. 44. Hygiene da alimentação. 45. Philosophia popular em proverbios. 46. Historia universal. 47. Biologia. 48. Gravidade. 7.ª **Serie**: N.º 49. Physiologia humana. 50. Chronologia. 51. Calor. 52. O mar. 53. Hygiene da habitação. 54. Optica. 55. As raças historicas na Lusitania. 56. Medicina domestica. 8.ª **Serie**: N.º 57. Esgrima. 58. Historia antiga. 59. Reptis e batrachios. 60. Natação. 61. Electricidade. 62. Fabulas e apologos. 63. Philosophia. 64. Grammatica franceza. 9.ª **Serie**: N.º 65. Historia da Botanica em Portugal. 66. Mechanica. 67. Moral. 68. Práctica de Escripturação. 69. O livro do Natal. 70. Historia natural dos peixes. 71. Magnetismo. 72. O vidro. 10.ª **Serie**: N.º 73. O codigo fundamental da nação portugueza. 74. Machinas de vapor. 75. Historia da Edade-Média. 76. Invertebrados. 77. A arte no theatro. 78. Photographia. 79. Methodo de francez. 80. Manual do fogueiro machinista. 11.ª **Serie**: N.º 81. Pedagogia. 82. A arte naval. 83. Manual do carpinteiro. 84. O cholera e seus inimigos. 85. Hydrostatica. 86. Piscicultura. 87. Direito publico internacional. 88. Lisboa e o cholera. 12.ª **Serie**: N.º 89. Historia natural dos articulados. 90. Historia maritima. 91. Topographia. 92. Historia moderna. 93. Psychologia. 94. O Brazil nos tempos coloniaes. 95. Hygiene do vestuario. 96. Geometria descriptiva. 13.ª **Serie**: N.º 97. A Guerra da Independencia. 98. Leitura e recitação. 99. Fortificação. 100. O navio. 101. Historia contemporanea. 102. Armaria. 103. Coisas portuguezas. 104. Viticultura. 14.ª **Serie**: N.º 105. Sociedades cooperativas. 106. Portugal pre-historico. 107. Equitação. 108. Direito internacional maritimo. 109. Zootechnia. 110. Metallurgia. 111. Manual do ferrador. 112. Restauração de quadros e gravuras. 15.ª **Serie**: N.º 113. Architectura. 114. Os insectos. 115. Viagens e descobrimentos maritimos. 116. Arte dramatica. 117. Vinhedos e Vinhos. 118. Grammatica ingleza. 119. Silvicultura. 120. Historia do theatro em Portugal. 16.ª **Serie**: N.º 121. Romanceiro portuguez. 122. A luz electrica. 123. O Brazil Independente. 124. Crystaes. 125. Plantas uteis dos campos de Portugal. 126. Caminhos-de-ferro. 127. O exterior do cavallo. 128. O macho e a femea no reino animal. 17.ª **Serie**: N.º 129. Desenho e Pintura. 130. As ilhas adjacentes. 131. Historia da Grecia. 132. Architectura Sacra. 133. Viagens e descobrimentos terrestres. 134. Astronomia Photographica. 135. Civilidade. 136. A unidade na Natureza. 18.ª **Serie**: N.º 137. O Archipelago dos Açores. 138. Manual do Typographo. 139. Ilhas Occidentaes do Archipelago Açoriano. 140. Alphabeto natural. 141. Copa e cozinha. 142. Trigonometria.

Quem pretender assignar para estas publicações, ou comprar qualquer volume avulso, queira dirigir-se em Lisboa ao editor DAVID CORAZZI, Rua da Atalaya 40 a 52,— e no Rio de Janeiro á filial da mesma casa, 38, Rua da Quitanda. As requisições devem ser acompanhadas da sua importancia em estampilhas, vales, ordens, ou lettras de facil cobrança.

Cada serie de 8 volumes cartonada em percalina, 500 réis; capa separada, para cartonar cada serie, 100 réis.